

**UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR**



**ESTUDIO DE LOS TIEMPOS DE RESPUESTA
A LAS VARIACIONES DE CAUDAL Y
TEMPERATURA EN INTERCAMBIADORES DE
CALOR EN CONTRACORRIENTE CON
APLICACIÓN AL INTERCAMBIADOR DE SALES EN
PLANTAS TERMOSOLARES**

Trabajo de fin de grado

Fecha de lectura: 11 de Julio de 2014

AUTOR: Alejandro Pedraza Aguirre
TUTOR: Domingo Santana Santana

Índice general

| | |
|---|----|
| Resumen..... | 7 |
| 1. Motivación y alcance | 9 |
| 2. Descripción de la central | 11 |
| 3. Estudio teórico | 15 |
| 3.1 Planteamiento de las ecuaciones del problema..... | 15 |
| 3.2 Solución numérica..... | 20 |
| 3.2.1 Aproximación por diferencias finitas | 20 |
| 3.2.2 Diferencias finitas implícitas anteriores de primer orden..... | 21 |
| 3.2.3 Implementación del código..... | 23 |
| 3.2.4 Estimación del error y condición CFL | 27 |
| 3.2.5 Diferencias finitas explícitas de primer orden | 30 |
| 3.3 Solución analítica | 33 |
| 4. Estudio experimental..... | 37 |
| 4.1 Validación de los modelos..... | 37 |
| 4.1.1 Respuesta ante el cambio de temperatura | 37 |
| 4.1.2 Medición de la constante de tiempo | 41 |
| 4.1.3 Respuesta al cambio de caudal | 42 |
| 4.1.4 Comparación de los resultados de los códigos y resultados experimentales..... | 46 |
| 4.2 Intercambiador Aceite-Sales de la central termosolar..... | 50 |
| 4.2.1 Sal como fluido caliente yendo por dentro de los tubos..... | 54 |
| 5. Conclusión | 59 |
| Referencias | 60 |

Agradecimientos

Lo primero que quisiera hacer para comenzar este trabajo es agradecer su apoyo a todas las personas que lo han hecho posible.

Sin duda el apoyo más importante ha sido el de mi familia. Ellos me apoyaron en esta aventura tardía que fue empezar ingeniería industrial como segunda carrera. Sin ese empujón y ayuda yo no estaría aquí. Sé que se sienten orgullosos de mí por lo conseguido pero yo estoy aún más orgulloso de ellos. Gracias por vuestro apoyo incondicional.

Gracias a mí tutor Domingo Santana Santana por confiar en mí para este bonito proyecto. Su guía ha sido muy importante y su enfoque y entendimiento de las tecnologías y como lidiar con los problemas han sido una gran enseñanza que me acompañará siempre.

Gracias a Dorothea por su apoyo constante y su comprensión. Sin duda es de lo mejor que me ha dado esta universidad. Espero que podamos compartir un prospero y largo futuro en Alemania.

A mis compis de la carrera, en especial a Alejandro por estar en todos los momentos importantes, buenos y malos, siempre ahí cuando se le necesita. A todos los compañeros que han hecho más ameno el paso por esta titulación como Daniel, Adrián, Carlos, Toco, Sandra, Ruth, Jose Antonio, Borja, Pablo,... Espero que no perdamos el contacto. También a todos aquellos que han sido compañeros de biblioteca en las trincheras, echaré de menos esas pausas para comer manzanas.

A mis amigos por aguantarme en modo ahorro estos años. Estando ahí incluso cuando yo no he podido estar demasiado. En especial a Oliver, gracias por la paciencia.

Por supuesto a cada profesor que he tenido, desde el cole con Asunción o Enrique, pasando por el instituto con Diego y sus vaciles, hasta las carreras con Sevilla, Gabilondo, Duque, Elena, Sádaba, Robles,... A todos mis jefes y compañeros en tantos trabajos. Todos, aunque muchos no lo sepáis, me habéis enseñado algo.

Resumen

A lo largo de esta tesis se va a simular, mediante distintos algoritmos, el comportamiento dinámico de un intercambiador de calor de doble tubo coaxial en contracorriente, durante el estado transitorio que se produce ante cambios de temperatura o de flujo másico. Los algoritmos que se implementarán se basarán en diferencias finitas implícitas, explícitas y por último una aproximación analítica que permita ahorrar tiempo de computación en los cálculos.

Se validará el modelo de simulación mediante distintos artículos académicos con resultados experimentales y se comprobará que funciona para intercambiadores propios de centrales térmicas. Se comprobará que su respuesta se puede ajustar a un sistema de primer orden y se estudiará la constante de tiempo que define el sistema ante las diferentes situaciones propuestas.

Después se modelizará para su uso en los intercambiadores de centrales termosolares de cilindro parabólico de unos 50 MW de potencia. Estas centrales poseen tanques de almacenamiento de sales fundidas que permiten guardar una gran cantidad de energía para ser usada cuando la radiación solar no es capaz de cubrir la demanda. Se hará un estudio de los tiempos de respuesta del intercambiador de calor que conecta estos tanques con el fluido caloportador de la central para determinar si son capaces de adaptarse rápidamente a diferentes situaciones de cambios en la demanda. Para ello se dimensionará, se indicarán las propiedades de sus fluidos y se estimarán sus coeficientes y sus temperaturas de entrada y salida. Por último se decidirá si cumple con los requerimientos mínimos por normativa para este tipo de instalaciones.

Abstract

This thesis simulates the dynamical behavior of a counter flow double pipe heat exchanger. The transient response is analyzed for changes on temperature and mass flow also. The algorithms will be implemented with implicit and explicit finite differences methods. We use an analytical approach too in order to improve computation time in the long time calculation of the heat exchanger.

The simulation model will be validated by using academic articles that contains experimental results and checking that the hypothesis are valid to use with the heat exchangers we use on thermal power plants. The time response of the system can be defined as first order system. Thus, we study the time constant corresponding to the different situations and changes on the conditions.

Finally, we will make a model to use on the heat exchangers in Solar-thermal power plants with parabolic cylinders with about 50 MW power. We study the time response for changes on the grid demand and the delay to get new power requirements. We will design the heat exchanger by following the procedures we learn at “thermal systems” course under nominal conditions. Then we define the properties of the fluids knowing the requirements of the power cycle, and the temperatures for the input and the output of the heat exchanger. At the end, we check if we get the maximum time delay that provides the law for this kind of installations.

1. Motivación y alcance

Los intercambiadores de calor son usados hoy en día en todo tipo de industrias, desde centrales de producción de potencia hasta aires acondicionados, pasando por el control del calor cedido y de la temperatura de procesos químicos. Suelen formar parte de un sistema donde su conexión con los demás componentes requieren de un control minucioso del flujo másico y de las temperaturas. Este control es especialmente delicado durante los estados transitorios donde se requiere controlar y simular los comportamientos en tiempo real. Es por esto que se intentan encontrar en los últimos años algoritmos de simulación lo más óptimos posibles que ofrezcan una respuesta precisa y rápida ante cualquier cambio que se produzca en las condiciones de trabajo.

Las vías de investigación para desarrollar estos algoritmos van en dos direcciones. Por un lado los análisis numéricos que generalmente requieren de un tiempo de computación considerable. Por otro, los algoritmos basados en resoluciones analíticas basadas en transformada de Laplace. Las ventajas de los primeros son que pueden simular cualquier condición que se les imponga y permiten un mayor grado de complejidad en la definición diferencial del problema; además el grado de error en la respuesta es conocido lo que permite acotar las condiciones de trabajo dentro de un rango establecido. Sin embargo requieren de un mayor tiempo de computación para tener resultados más o menos precisos y, en caso de usar incrementos grandes para simplificar el problema y que los tiempos se reduzcan, presentan problemas de dispersión en la solución con lo que esta deja de ser válida. Los algoritmos basados en métodos analíticos son capaces de resolver muy rápidamente el problema pero requieren simplificaciones añadidas que no siempre pueden cumplirse y restringen las condiciones en que la solución dada es válida a casos como que uno esté en cambio de fase y su temperatura sea constante, o que el flujo másico sea constante. Sin embargo son estos últimos los que más se han intentado implementar en los últimos años dado que los sistemas de control de las centrales necesitan modelos eficientes y simples que permitan un comportamiento rápido y robusto.

En el caso de los intercambiadores de calor para centrales de energía térmica, lo que se suele hacer es diseñar la central para trabajar óptimamente en unas condiciones de trabajo nominales estables y, desde ellas, la respuesta temporal ante los cambios en procesos transitorios puede ser descrita como una demora en el tiempo que tardan en establecerse las nuevas condiciones de la demanda o de los distintos parámetros del ciclo. Además, en este tipo de intercambiadores, uno de los aspectos que se deben cuidar con mayor atención es el estrés térmico al que sometemos a los componentes y este, a su vez, es función del tiempo al que se le somete a los cambios de temperatura. Por ello para calcular la durabilidad de la central a largo plazo, hemos de simular correctamente estos transitorios e implementar un sistema de control preciso que nos permita optimizar lo máximo posible estos cambios para no someter a los tubos a un desgaste excesivo durante los mismos.

Aquí se propondrán tres algoritmos donde se buscará optimizar el tiempo de computación para un sistema de control en tiempo real por un lado, y por otro se tratará de conseguir

precisión para un cálculo a largo plazo de los estreses térmicos a los que se someten los componentes. Estos métodos se aplicarán al caso práctico de una central termosolar de cilindro parabólico para determinar los tiempos de transición que se establecen ante los cambios de demanda.

El hecho de que nos centremos en una central termosolar para aplicar nuestro algoritmo es debido a varios factores: por un lado poseen una tecnología relativamente novedosa donde aún no se han desarrollado sistemas de control automáticos para el control integral de la central y, por ello, el poseer algoritmos que faciliten dicha tarea cobra especial importancia en ellas; por otro, los tiempos de respuesta constituyen un desafío en estas centrales donde dependemos del sol como fuente de energía y se dan transitorios más a menudo cuando, por ejemplo, tenemos un día con nubes o si la demanda cambia. Además, estas centrales presentan una ventaja decisiva respecto de otras energías renovables ya que pueden almacenar parte de la energía que recogen del sol y suplir la demanda incluso en momentos donde no tenemos radiación solar disponible. Ese almacenamiento se hace por medio de sales fundidas que poseen una gran capacidad para retener la energía térmica y que, mediante tanques con dimensiones que no son excesivas (14 metros de altura y 36 metros de diámetro), son capaces de proveer hasta 7 horas media de servicio a plena potencia produciendo 50MW eléctricos. Por ello, su integración en el sistema eléctrico es más sencilla y los cálculos de los tiempos que supone permutar el operar con la energía del sol a trabajar con la energía almacenada o una mezcla de ambas, supone un factor vital a la hora de establecer un marco regulativo propio dentro del mercado de la energía.

En España se viene desarrollando en los últimos años esta tecnología y ya disponemos de varias centrales operando con éxito dentro de nuestro territorio generando en torno a 1000MW [10] con otros 5000MW proyectados antes de 2020. La apuesta en esta tecnología es clara, y el motivo de que así sea en este país es evidente.

En esta tesis aplicaremos los algoritmos para simular intercambiadores de calor, junto con los métodos de cálculo que se emplean para determinar los coeficientes de transferencia de calor de los intercambiadores de centrales térmicas de generación de energía, para analizar el intercambiador que conecta el almacenamiento de energía en forma de sales fundidas con el ciclo de potencia y de absorción del calor por radiación solar. Se estudiarán sus tiempos de respuesta a estados transitorios y se determinará si puede cumplir con los requerimientos dentro del marco regulatorio de la red eléctrica Española.

2. Descripción de la central

Existen dos modos de convertir la energía solar en electricidad. Una es por medio de la tecnología fotovoltaica que convierte directamente la radiación solar en energía eléctrica. La otra es transformando la radiación en energía térmica, ósea en calor, para aplicar esta energía en un ciclo Rankine que transforme la energía térmica en mecánica y a su vez en eléctrica moviendo un alternador. Esto es lo que hacen las plantas termosolares.

Existen hasta nueve tecnologías según [9] para recoger la radiación solar, y ocho de ellas han sido llevadas a la práctica en centrales que producen electricidad para la red eléctrica. Todas se basan en concentrar la acción solar y así calentar un fluido, pero las variantes son si este fluido se encuentra en movimiento o no, si concentramos en un punto o a lo largo de un tubo, o si concentramos mediante discos o espejos curvados. La tecnología que se considera más madura en estos momentos, con más del 95% de la potencia de generación termosolar instalada en España, es la de concentrador de cilindro parabólico o CCP. Consiste en el uso de espejos prismáticos curvados en forma de parábolas que tienen la propiedad de concentrar la radiación en el foco de la misma donde situamos un tubo absorbedor de entre 600 y 800 metros, con un fluido térmico caloportador en su interior para transmitir la energía solar a lo largo del mismo y calentar este a temperaturas de unos 400°C, capaces de mover un ciclo de potencia Rankine. Aquí podemos ver el esquema de la central:

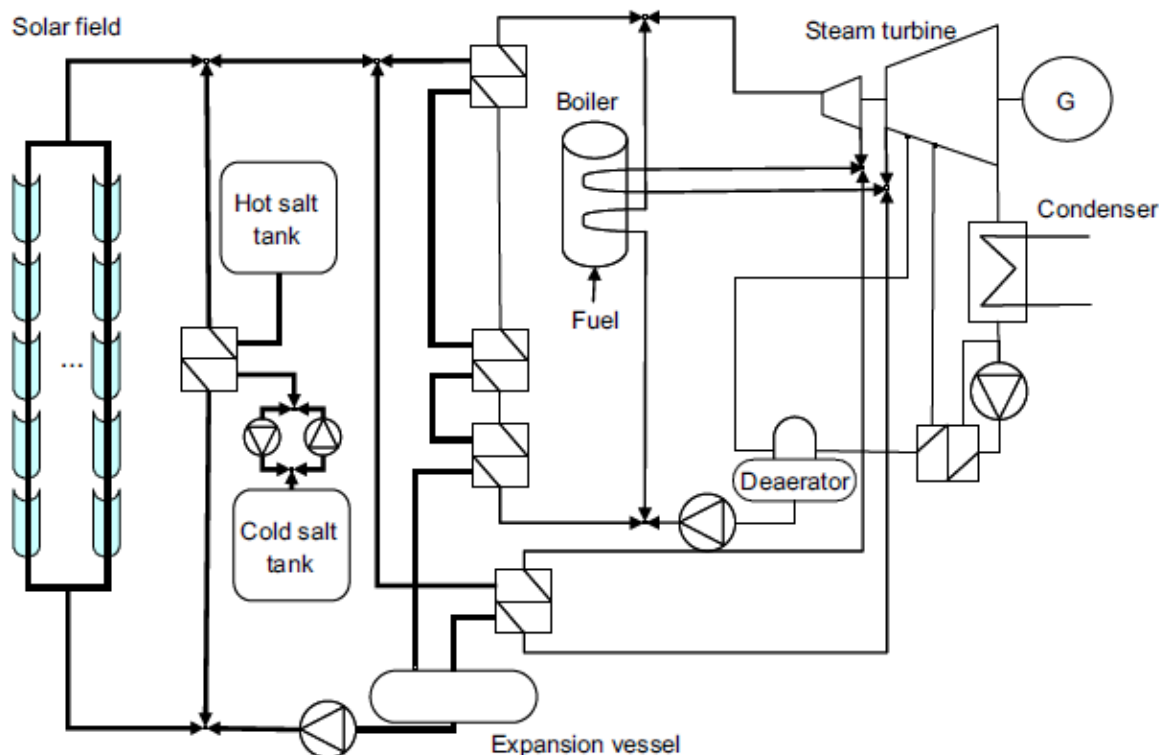


Fig 2.1, *Esquema de una central CCP.*(Fuente: J. Usaola [10])

Lo primero que vemos en la figura anterior y lo más característico de estas centrales, son los colectores de cilindro parabólico. Como hemos comentado concentran la acción solar en su foco. La concentración óptica hace que sólo la radiación directa del sol sea aprovechable para el receptor, por lo que se hace necesario un sistema seguimiento del sol de forma continua a lo largo del día. En la siguiente figura vemos de manera esquemática el funcionamiento del sistema:

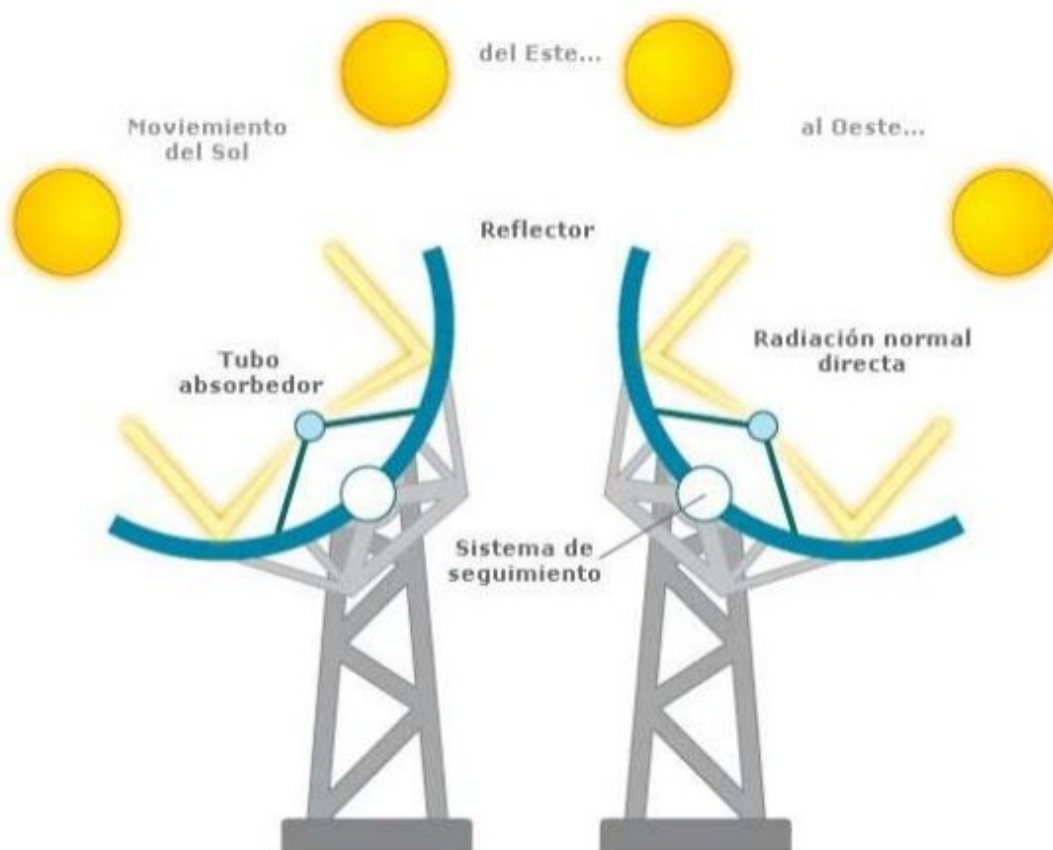


Fig 2.2. Sistema de seguimiento del campo solar para captar la radiación solar y concentrarla en el foco de la parábola

Este sistema no solo nos permite aprovechar al máximo la acción de los rayos solares, además nos facilita el control de la central ya que cuando no necesitamos todo el calor que recibimos porque la demanda no lo exige y los tanques de almacenamiento de sales fundidas ya tienen almacenado todo el calor que pueden, podemos girar los espejos para no estar en el ángulo óptimo o incluso para no recibir casi radiación. Así conseguimos no dañar la instalación sobrecalentando los tubos en exceso. Otra ventaja de este tipo de tecnología es la mayor variedad de equipos comerciales disponibles, factor decisivo para abaratar costes y facilitar el diseño. Además, las pérdidas de carga que se producen a lo largo de los tubos absorbedores suelen ser bajas ya que en realidad se trata de una tubería recta. Por otra parte, como la superficie del absorbedor es pequeña, las pérdidas térmicas durante son pequeñas, debido a la poca cantidad de fluido en éstos.



Fig 2.3. *Instalación de colectores de cilindro parabólico.*

El fluido que movemos dentro del tubo absorbedor, y al que llamamos fluido térmico caloportador, es un aceite sintético con una alta capacidad térmica que permite acumular una gran cantidad de calor. La principal propiedad de este fluido es que posee una alta capacidad térmica como muestra [6]. El tubo absorbedor consta de dos tubos concéntricos separados por una capa de vacío. El interior, por el que circula el fluido térmico, es metálico y el exterior de cristal. El fluido entra a una temperatura de entre 200 y 300 grados por un extremo y sale por el otro a unos 400°C [9]. Este fluido caliente se dirige a una serie de intercambiadores de calor para producir vapor sobrecalentado. La energía presente en este vapor se convierte en energía eléctrica utilizando una turbina de vapor convencional y un generador acoplado a ella.

Este tipo de centrales puede incorporar un sistema de almacenamiento del calor por medio de sales fundidas. El esquema de la figura 2.1 corresponde a una de estas centrales. Estos tanques suponen un gran avance ya que uno de los mayores problemas que tienen las energías renovables es precisamente el hecho de depender de las condiciones climatológicas para generar electricidad y, por desgracia, el clima no sigue las mismas curvas que la demanda. Cabe señalar que una vez la energía eléctrica se encuentra en la red debe ser consumida, ya que no existe ninguna posibilidad de almacenamiento de energía eléctrica como tal, y por tanto, la generación y el consumo deben coincidir. Ello hace muy importantes a las previsiones de consumo de electricidad en la red, y la posibilidad de aumentar la generación si el sistema así lo exige.

Ahí radica la gran mejora que supone poder generar la electricidad cuando las condiciones son favorables, pero consumirla cuando se requiera. Dado que la tecnología aún no provee ningún sistema práctico para almacenar la electricidad como tal, en forma de baterías ni de ninguna otra manera. Hemos de encontrar otros modos, por ejemplo en las centrales hidráulicas se ha recurrido al almacenamiento de agua embalsada, para desembalsarla y turbinarla en el momento más adecuado; incluso, el agua se bombea de nuevo a la parte superior del embalse en los momentos de bajo consumo eléctrico, de manera que pueda volver a disponerse de ella. Este proceso, aunque desde el punto de vista energético es absurdo (siempre se perderá energía en el proceso), desde el punto de vista económico y práctico no lo es, ya que el agua se

bombea en los momentos de exceso de energía eléctrica y por tanto, cuando el coste de esta es muy bajo.

En las centrales termosolares hacemos algo parecido. En este caso se almacena siempre como energía térmica, que producirá electricidad después en el Rankine, mediante distintas tecnologías. En la central propuesta, lo que utilizamos es el almacenamiento en forma de calor sensible de una masa de sales fundidas en dos tanques, de forma que las sales frías y las calientes se separan. En el tanque donde tenemos las sales calientes, la temperatura es cercana a unos 400°C y otro donde ya hemos extraído el calor útil y que llamamos tanque frío tiene unos 280°C. Durante el ciclo de carga, las sales intercambian calor con el fluido procedente del campo solar y se almacenan en el tanque caliente. Durante el ciclo de descarga, el sistema simplemente opera en sentido contrario al anteriormente expuesto, calentando el fluido caloportador que generará vapor para mover la turbina que producirá finalmente la electricidad.

3. Estudio teórico

3.1 Planteamiento de las ecuaciones del problema

A continuación estudiaremos el modo de resolver un intercambiador de calor para calcular la distribución de temperaturas a lo largo del mismo y su evolución en el tiempo. Ello nos permitirá hacer los cálculos de los estados transitorios y de los estreses térmicos, que aplicaremos a la central propuesta.

Se desea estudiar el transitorio dentro de un intercambiador en contracorriente para dos fluidos sin cambio de fase. El intercambiador se asume de forma simplificada como un doble tubo coaxial donde el fluido caliente entra por un extremo y va por fuera y el fluido frío entra por el opuesto y va por dentro. En la fig. 3.1 vemos el esquema del sistema.

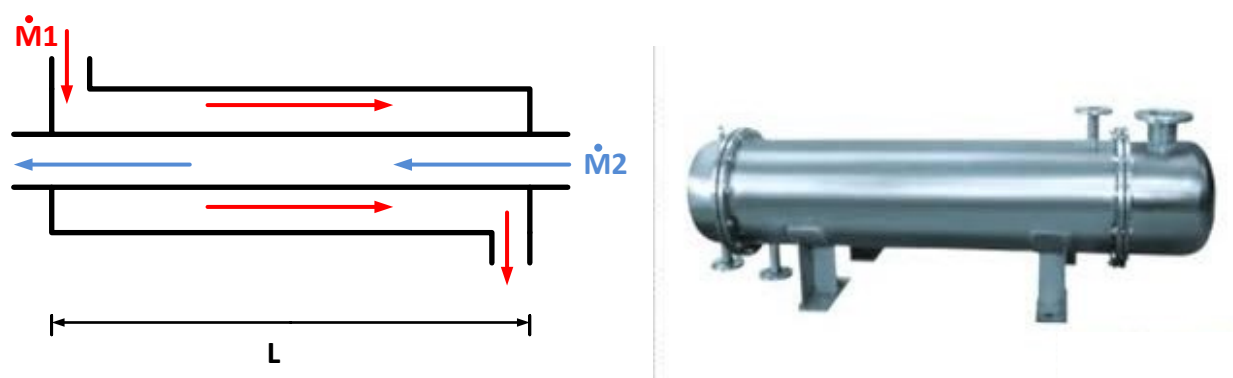


Fig. 3.1, *Esquema y foto de intercambiador de calor en doble tubo coaxial contracorriente*

Para simplificar el problema haremos uso del modelo planteado en [1, 2] donde asumimos las siguientes hipótesis:

1. Los fluidos presentan una sola fase, son incompresibles (densidad constante) y las demás propiedades termofísicas se asumen a su vez constantes a lo largo del intercambiador para un tiempo dado (usaremos las propiedades medias del fluido de la entrada y la salida).
2. Los fluidos están en flujo turbulento. Por lo tanto suponemos que la transferencia de calor por conducción en la dirección longitudinal del tubo es muy pequeña en comparación con la convección para cada fluido y por tanto es despreciable.
3. Asumimos que la resistencia conductiva del muro es despreciable frente a la convección para ambos fluidos. Esta condición está subordinada a tener un número de Biot por debajo de 0.05 en cilindros como se muestra entre las

páginas 260-261 en [3]. El número de Biot compara la convección en ambos fluidos con la conducción en el muro y se define como:

$$Bi = \frac{hL}{k}$$

Donde L es asumido como el espesor del tubo que separa ambos fluidos. De esta manera despreciamos el gradiente de temperaturas en el tubo que separa a ambos fluidos y asumimos que la temperatura será igual en ambos extremos.

4. Despreciamos perdidas por transferencia entre el fluido externo y el ambiente a través del tubo exterior. Por tanto el tubo exterior no es tenido en cuenta en nuestro análisis de conservación de energía.

Ahora dividimos el intercambiador en rebanadas de anchura diferencial de x, dx, para poder plantear un balance de conservación de energía en un intervalo de tiempo, dt, como se muestra en la figura 3.2:

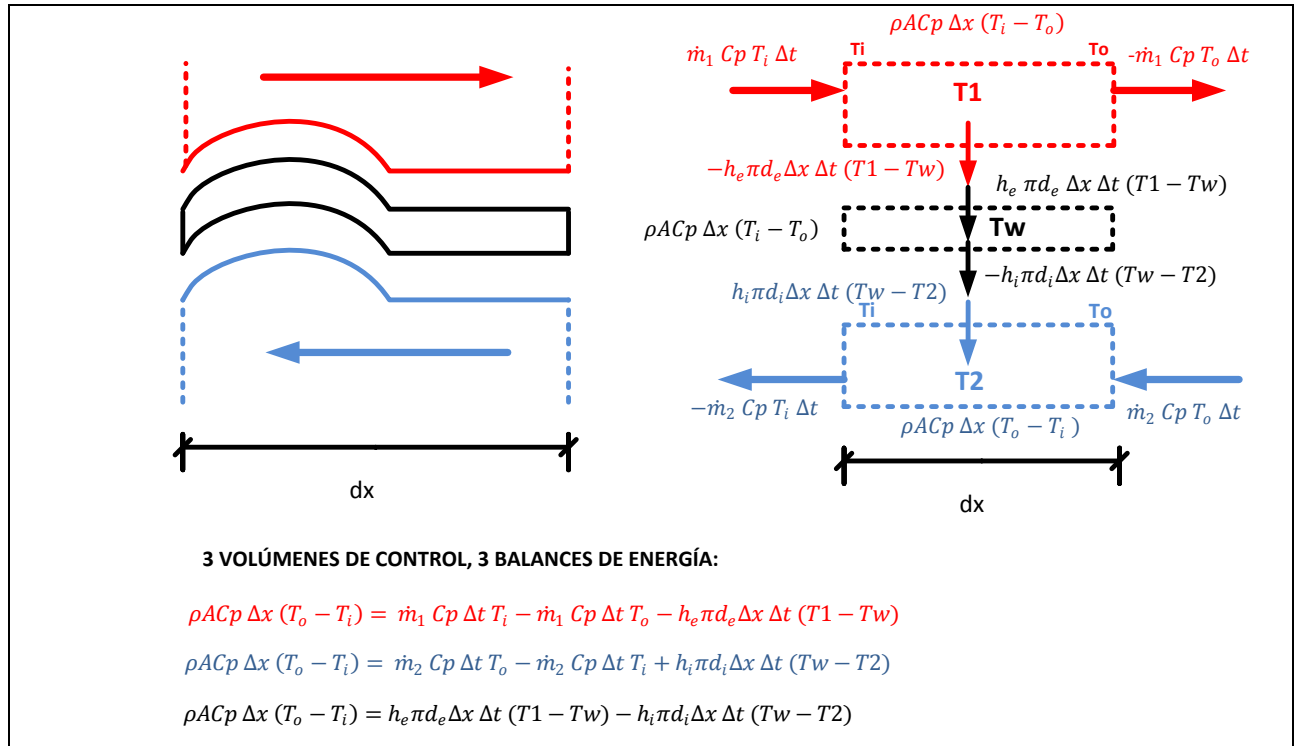


Fig. 3.2, Balance de energía del elemento diferencial del intercambiador.

Donde hemos llamado T1 a la distribución de temperaturas del fluido caliente, T2 a la distribución de temperaturas del fluido frío y Tw a la distribución de temperaturas del muro. El subíndice w viene del inglés *wall*, y no de *water* como podría parecer.

Consideramos que la transferencia de energía dominante en el sistema es la de convección, lo que se cumple en altos números de Reynolds en condiciones de turbulencia que son las que impondremos en nuestro modelo, y analizando los caudales de entrada y salida de

los fluidos con el calor que ceden o cogen los mismos o el muro, hemos encontrado ese sistema de tres ecuaciones donde las incógnitas serán las temperaturas del muro y los fluidos. Considerando los intervalos de tiempo, las diferencias de temperatura y las rebanadas de intercambiador como incrementos pequeños, llegamos al siguiente sistema de ecuaciones que es una reformulación del anterior:

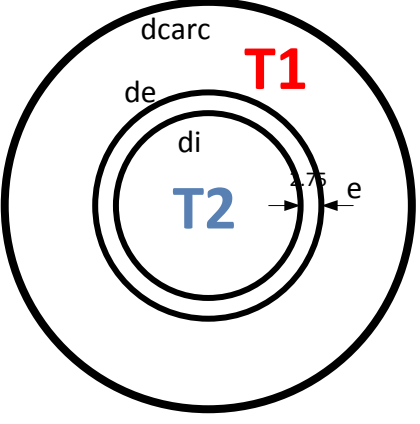
$$\begin{cases} \rho_1 A_1 C_{p1} \Delta x \Delta T_1 = -\dot{m}_1 C_{p1} \Delta t \Delta T_1 - h_e \pi d_e \Delta x \Delta t (T_1 - T_w) \\ \rho_2 A_2 C_{p2} \Delta x \Delta T_2 = \dot{m}_2 C_{p2} \Delta t \Delta T_2 + h_i \pi d_i \Delta x \Delta t (T_w - T_2) \\ \rho_w A_w C_{pw} \Delta x \Delta T_w = h_e \pi d_e \Delta x \Delta t (T_1 - T_w) - h_i \pi d_i \Delta x \Delta t (T_w - T_2) \end{cases}$$

El criterio de signos que se ha seguido para plantear las ecuaciones ha sido el siguiente. Cuando el caudal másico entra en el volumen diferencial, consideramos que es sentido positivo mientras que cuando sale, será negativo. No hemos supuesto, en este caso, que temperatura es mayor, si T_i o T_o en cada fluido, y por tanto aunque cambie el fluido que se calienta y enfría, estos signos se mantendrían iguales y el incremento positivo o negativo de temperaturas vendría dado por las condiciones del sistema. No pasa igual con la convección. Para el flujo de calor por convección, el criterio que hemos tomado como referencia ha sido el sentido de la flecha en la figura 3.2, esto es, si sale, cedemos calor y suponemos que la temperatura del muro es inferior a la del fluido y tomamos signo negativo y, si entra, aportamos calor, supondremos signo positivo. Por tanto aquí si estamos suponiendo que T_1 será mayor que T_w y esta a su vez que T_2 .

A continuación dividimos las ecuaciones entre los incrementos de x y de t para colocarlos de modo que podamos plantear después los elementos diferenciales correspondientes:

$$\begin{cases} \rho_1 A_1 C_{p1} \frac{\Delta T_1}{\Delta t} = -\dot{m}_1 C_{p1} \frac{\Delta T_1}{\Delta x} - h_e \pi d_e (T_1 - T_w) \\ \rho_2 A_2 C_{p2} \frac{\Delta T_2}{\Delta t} = \dot{m}_2 C_{p2} \frac{\Delta T_2}{\Delta x} + h_i \pi d_i (T_w - T_2) \\ \rho_w A_w C_{pw} \frac{\Delta T_w}{\Delta t} = h_e \pi d_e (T_1 - T_w) - h_i \pi d_i (T_w - T_2) \end{cases}$$

Cabe aclarar el significado de cada término en la ecuación:

| Nomenclatura: | |  |
|-----------------------------------|--|--|
| $A_1 = \pi/4 (d_{arc}^2 - d_e^2)$ | Sección de paso fluido1 [m ²] | |
| $A_2 = \pi/4 (d_i^2)$ | Sección de paso fluido2 [m ²] | |
| $A_w = \pi/4 (d_e^2 - d_i^2)$ | Sección del muro [m ²] | |
| μ | Viscosidad dinámica [kg/m s] | |
| ρ | Densidad [kg / m ³] | |
| h | Coeficiente convectivo de transferencia de calor. [kW / m ² °K] | |
| C_p | Calor específico [kJ / kg °K] | |
| \dot{m} | Flujo de gasto másico [kg / s] | |

Reordenamos para dejar a la izquierda lo que concierne a la variable correspondiente (en la primera ecuación lo que tenga que ver con T1, en la segunda con T2 y en la última Tw), ya que presentando el sistema de esta manera será más sencillo después plantear los algoritmos para resolver el sistema.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 A_1 C_{p1} \frac{\Delta T_1}{\Delta t} + \dot{m}_1 C_{p1} \frac{\Delta T_1}{\Delta x} + h_e \pi d_e T_1 = h_e \pi d_e T_w \\ \rho_2 A_2 C_{p2} \frac{\Delta T_2}{\Delta t} - \dot{m}_2 C_{p2} \frac{\Delta T_2}{\Delta x} + h_i \pi d_i T_2 = h_i \pi d_i T_w \\ \rho_w A_w C_{pw} \frac{\Delta T_w}{\Delta t} + T_w (h_e \pi d_e + h_i \pi d_i) = h_e \pi d_e T_1 + h_i \pi d_i T_2 \end{array} \right.$$

Ahora sólo queda simplificar estas ecuaciones y definir unos parámetros que son los que gobiernan el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_1 A_1 C_{p1}}{h_e \pi d_e} \frac{\Delta T_1}{\Delta t} + \frac{\dot{m}_1 C_{p1}}{h_e \pi d_e} \frac{\Delta T_1}{\Delta x} + T_1 = T_w \\ \frac{\rho_2 A_2 C_{p2}}{h_i \pi d_i} \frac{\Delta T_2}{\Delta t} - \frac{\dot{m}_2 C_{p2}}{h_i \pi d_i} \frac{\Delta T_2}{\Delta x} + T_2 = T_w \\ \frac{\rho_w A_w C_{pw}}{(h_e \pi d_e + h_i \pi d_i)} \frac{\Delta T_w}{\Delta t} + T_w = \frac{h_e \pi d_e T_1 + h_i \pi d_i T_2}{(h_e \pi d_e + h_i \pi d_i)} \end{array} \right.$$

Donde sí usamos los parámetros que propone [1], y convertimos los incrementos en diferenciales, queda el sistema final de ecuaciones diferenciales que gobierna el problema propuesto:

$$\left\{ \begin{array}{l} D1 \frac{\partial T1}{\partial t} + L1 \frac{\partial T1}{\partial x} + T1 = Tw \\ D2 \frac{\partial T2}{\partial t} - L2 \frac{\partial T2}{\partial x} + T2 = Tw \\ Dw \frac{\partial Tw}{\partial t} + Tw = \frac{h1 d T1 + h2 (d - 2e) T2}{h1 d + h2 (d - 2e)} \end{array} \right.$$

Con:

$$\begin{aligned} D1 &= \frac{\rho_1 A_1 C_{p1}}{h_e \pi d_e} & D2 &= \frac{\rho_2 A_2 C_{p2}}{h_i \pi d_i} \\ L1 &= \frac{\dot{m}_1 C_{p1}}{h_e \pi d_e} & L2 &= \frac{\dot{m}_2 C_{p2}}{h_i \pi d_i} \\ Dw &= \frac{\rho_w A_w C_{pw}}{(h_e \pi d_e + h_i \pi d_i)} \end{aligned}$$

Donde hay que destacar que los parámetros D y L de los respectivos fluidos y del muro, tienen dimensiones. D tiene dimensiones de tiempo [s] y L tiene de longitud [m]. Hay que señalar, que si dividimos L1/D1 o L2/D2, tenemos las velocidades con las que avanzan los fluidos 1 y 2, respectivamente.

El sistema de ecuaciones diferenciales parabólicas de primer orden que nos queda es no homogéneo y no tiene una solución analítica explícita ni implícita que se obtenga de forma directa. Las condiciones iniciales, necesarias y suficientes, que solucionan este sistema son las siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} T1(0, t) = T1_{step} \\ T1(x, 0) = T1_{ini} \\ T2(0, t) = T2_{ini} \\ T2(x, 0) = T2_{ini} \\ Tw(0) = Tw_{ini} \end{array} \right.$$

Para resolverlo afrontaremos tres estrategias distintas, dos basadas en métodos numéricos y otra basada en procedimientos analíticos. Primero resolveremos el sistema con diferencias finitas implícitas de primer orden donde el error cometido es pequeño y conocido, de manera que su solución es a priori bastante fiable aunque el tiempo de cálculo es bastante alto. Después probaremos a plantear un algoritmo de diferencias finitas explícitas que debería acortar los tiempos de computación sin incrementar el error demasiado. Por último, aplicando transformada de Laplace con algunas hipótesis simplificadoras se puede obtener un modelo analítico explícito que acorte sensiblemente los tiempos de cálculo.

3.2 Solución numérica

Para encontrar una solución fiable al sistema necesitamos encontrar un algoritmo que resuelva de manera aproximada el sistema para cualquier modificación de los valores. Se ha elaborado un algoritmo basado en diferencias finitas que nos proporciona una información aproximada pero con error conocido. Hemos optado por un algoritmo implícito para obtener una solución precisa al problema y posteriormente mejorar la optimización en los tiempos de cálculo del algoritmo con diferencias finitas explícitas de primer orden.

3.2.1 Aproximación por diferencias finitas

Existen diferentes variantes de este método, pero todas se basan en aproximar las derivadas a un cociente de cantidades finitas en lugar de infinitesimales. Esto reduce considerablemente la complejidad del algebra para llegar a la solución aunque también lo hace la precisión de la solución obtenida. Afortunadamente, gracias a la expansión por polinomios de Taylor, podemos obtener una estimación del error cometido lo que da lugar a una solución acotada. Para incrementar la precisión de las soluciones debemos emplear un número mucho mayor de operaciones y, en general, los tiempos de cálculo son muy largos para estos procedimientos. Por ello aunque la teoría en estos algoritmos es antigua, no es hasta la explosión de la informática al final del siglo pasado que se han convertido en una herramienta básica para los científicos. La teoría sobre estos métodos que se explica a continuación, y con la que hemos elaborado el algoritmo de resolución, se ha extraído de los capítulos 29 y 30 de [6].

El modo de convertir una derivada en una diferencia finita es usar una expansión de Taylor que nos dará un polinomio cuyo grado corresponderá al orden de la aproximación. Así, la función en un punto posterior (o anterior) que este cerca con una separación de h , será:

$$f_{i+1} = f_i + \frac{f'_i h}{1!} + \frac{f''_i h^2}{2!} + \dots$$

$$f_{i-1} = f_i - \frac{f'_i h}{1!} + \frac{f''_i h^2}{2!} - \dots$$

Si nos quedamos en un primer orden, y en función de si cogemos el punto o nodo posterior, el anterior o ambos; la derivada primera de la función queda como sigue:

$$\text{central: } f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

$$\text{anterior: } f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h)$$

$$\text{posterior: } f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h)$$

Donde la expresión $O(h^2)$ quiere decir que el error cometido es del orden del incremento al cuadrado y, por tanto, será menor y más preciso que $O(h)$ que es un error del orden del incremento. También podemos conseguir un error de ese orden o mayor desde puntos (nodos) sólo posteriores o anteriores usando la expansión de Taylor en un orden mayor. Por ejemplo si usamos un segundo orden:

$$\text{anterior: } f'_i = \frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i}{2h} + O(h^2)$$

$$\text{posterior: } f'_i = \frac{-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i}{2h} + O(h^2)$$

En nuestro problema solo tenemos primeras derivadas con lo que estas expresiones son suficientes, pero aplicando estos mismos procedimientos se podrían obtener derivadas de mayor orden y mayor orden de precisión, con expresiones algo mayores que darían lugar a tiempos de cálculo mucho mayores también. Si particularizamos en nuestro problema tenemos dos h , es decir, dos incrementos que se mantienen constantes: Δx e Δt ; y la función f puede ser la temperatura del muro, la del fluido caliente 1 o la del fluido frío 2: T_1 T_2 y T_w ; todas funciones de x y de t . Así pues, particularizando para la derivada de T_1 respecto de x por ejemplo, subindexando como j los nodos en el tiempo y como i el avance longitudinalmente en el eje x , las diferencias finitas posteriores corresponderían a la siguiente fórmula:

$$\left. \frac{\partial T_1}{\partial x} \right|_{x_i}^{t_j} = \frac{-T_{1,i+2}^j + 4T_{1,i+1}^j - 3T_{1,i}^j}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

3.2.2. Diferencias finitas implícitas anteriores de primer orden

Buscamos resolver las ecuaciones de manera precisa para obtener una solución fiable de referencia en una primera aproximación, dentro de un error de cálculo conocido. Primero, se optó por un algoritmo en segunda aproximación con errores del orden de Δh^2 , pero se comprobó que los tiempos de cálculo que precisaban eran demasiado largos y por ello, para no requerir un tiempo excesivo, el número de elementos en que se divide en intercambiador tenía que ser menor a diez. Cuando se probó con unas diferencias finitas en primera aproximación con un error del orden Δh , se advirtió que el tiempo era menor y que el mismo intercambiador se podía dividir en unos 100 pasos, con lo que finalmente el error es similar y el tiempo algo menor. Por ello, se ha optado por aplicar un algoritmo basado en unas diferencias finitas implícitas de primer orden.

Se ha optado por un modelo de diferencias finitas que sean anteriores debido a la propia naturaleza de las ecuaciones ya que, al no conocer las propiedades a la salida del intercambiador para ninguno de los fluidos, ni tampoco las temperaturas en un tiempo futuro, no

podemos aplicar ni diferencias centrales ni posteriores (que son las más óptimas para resolver por ejemplo la ecuación del calor en dos dimensiones conocidas las fronteras [5]).

Aplicando las diferencias tal y como se definieron en el capítulo anterior, al sistema de ecuaciones que obtuvimos en 3.1, llegamos al siguiente sistema:

$$\begin{cases} D1 \frac{T1_i^j - T1_i^{j-1}}{\Delta t} + L1 \frac{T1_i^j - T1_{i-1}^j}{\Delta x} + T1_i^j = Tw_i^j \\ D2 \frac{T2_{i-1}^j - T2_{i-1}^{j-1}}{\Delta t} + L2 \frac{T2_{i-1}^j - T2_i^j}{\Delta x} + T2_{i-1}^j = Tw_i^j \\ Dw \frac{Tw_i^j - Tw_i^{j-1}}{\Delta t} + Tw_i^j = \frac{h1 d T1_i^j + h2 (d - 2e) T2_{i-1}^j}{h1 d + h2 (d - 2e)} \end{cases}$$

Observando cuidadosamente, vemos que se trata de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, ya que sólo desconocemos $T1(j, i)$, $T2(j, i-1)$ y $Tw(j, i)$. Las condiciones iniciales nos proporcionan los demás datos. Llama la atención el hecho de que en $T2$ usemos $i-1$ en lugar de i como en las otras ecuaciones. Esto se explica desde el hecho de tener un intercambiador en contracorriente. Cuando hicimos el balance de energía ya vimos el criterio utilizado para los signos y que nodos intervenían en el elemento diferencial.

También hay que resaltar el hecho de haber cambiado el signo del Δx en el fluido frío o $T2$. Esto se hace debido a que el código corre en la dirección del fluido caliente y, por lo tanto, el incremento de $To-Ti$ que “ve” el fluido frío, va al contrario y por tanto le cambiamos el signo para cuadrar el sistema de referencia.

Para resolver el sistema, lo redistribuimos para obtener un sistema matricial $Ax=b$ que sea fácilmente resoluble para un software matemático como puede ser matlab. Así, el sistema quedaría:

$$\begin{cases} T1_i^j \left(\frac{D1}{\Delta t} + \frac{L1}{\Delta x} + 1 \right) - Tw_i^j = T1_i^{j-1} \frac{D1}{\Delta t} + T1_{i-1}^j \frac{L1}{\Delta x} \\ T2_{i-1}^j \left(\frac{D2}{\Delta t} + \frac{L2}{\Delta x} + 1 \right) - Tw_i^j = T2_{i-1}^{j-1} \frac{D2}{\Delta t} + T2_i^j \frac{L2}{\Delta x} \\ Tw_i^j \left(\frac{Dw}{\Delta t} + 1 \right) - \frac{h1 d T1_i^j + h2 (d - 2e) T2_{i-1}^j}{h1 d + h2 (d - 2e)} = Tw_i^{j-1} \frac{Dw}{\Delta t} \end{cases}$$

Donde sólo hemos reorganizado los parámetros de modo y manera que dejamos a la izquierda lo que nos es desconocido, y a la derecha lo que es conocido.

Para solucionar este sistema debemos ser cautelosos debido a que, si bien $T2(j, i)$ es conocido al final del intercambiador, no lo es en el primer nodo. En el siguiente apartado explicamos el modo de resolver este sistema y como organizamos el algoritmo en el código para determinar la distribución de las temperaturas.

3.2.3 Implementación del código

Observando el sistema de diferencias finitas anterior, apreciamos que el modo en que organizamos las ecuaciones con los métodos numéricos es organizando las funciones, temperaturas en este caso, en nodos donde tenemos una temperatura sub i o sub j para cada sección de longitud y de tiempo. Subdividimos las funciones en secciones cuyo tamaño será el incremento diferencial escogido y éste se mantendrá constante. Cuando representamos esto de manera gráfica, observamos una malla o grid en cuyos puntos de intersección o nodos, obtendremos un valor de la función que será la solución aproximada. En nuestro caso, para la distribución de temperaturas de cada uno de los fluidos tendremos una malla en dos dimensiones, dado que la temperatura es función de la posición en el eje x y del tiempo, que podemos representar en el siguiente esquema:

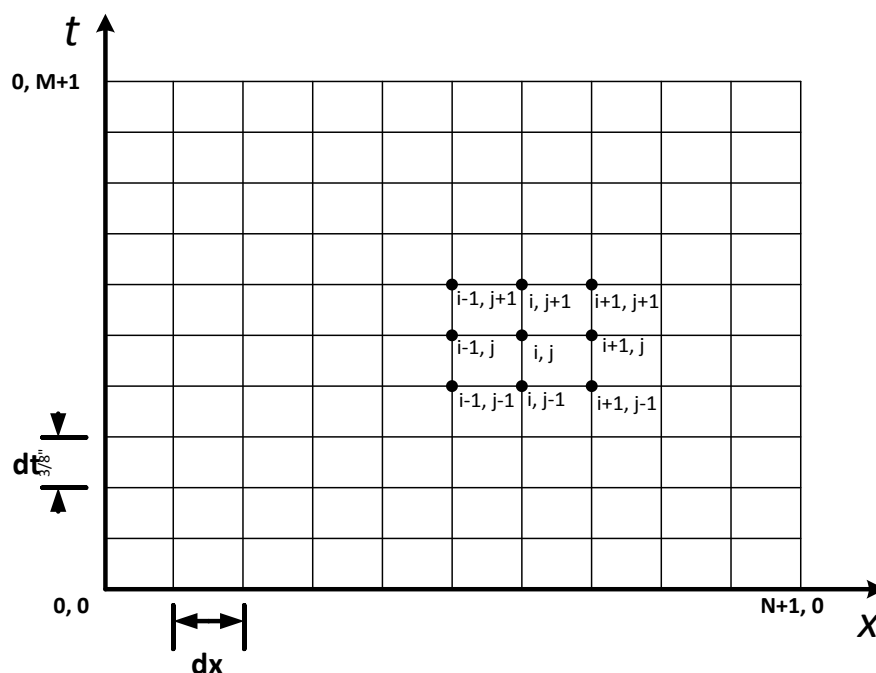


Fig. 3.3, Grid o malla para la discretización de la distribución de temperaturas de cualquiera de los fluidos o del muro.

A continuación aplicamos las condiciones iniciales y de contorno para establecer valores en algunos de los nodos y así resolver el sistema y obtener las soluciones en toda la malla. En nuestro caso conocemos las temperaturas iniciales en un tiempo 0 en todo el intercambiador, así como las propiedades del fluido a la entrada del intercambiador para ambos fluidos. Así pues, basándonos en esta malla y ajustando al sistema de ecuaciones propuesto con las condiciones descritas, podemos esquematizar el sistema en nodos para ver de manera sencilla

y directa el modo en que hemos organizado el algoritmo de resolución, y el modo en que se aplican las diferencias finitas, en la figura 3.4.

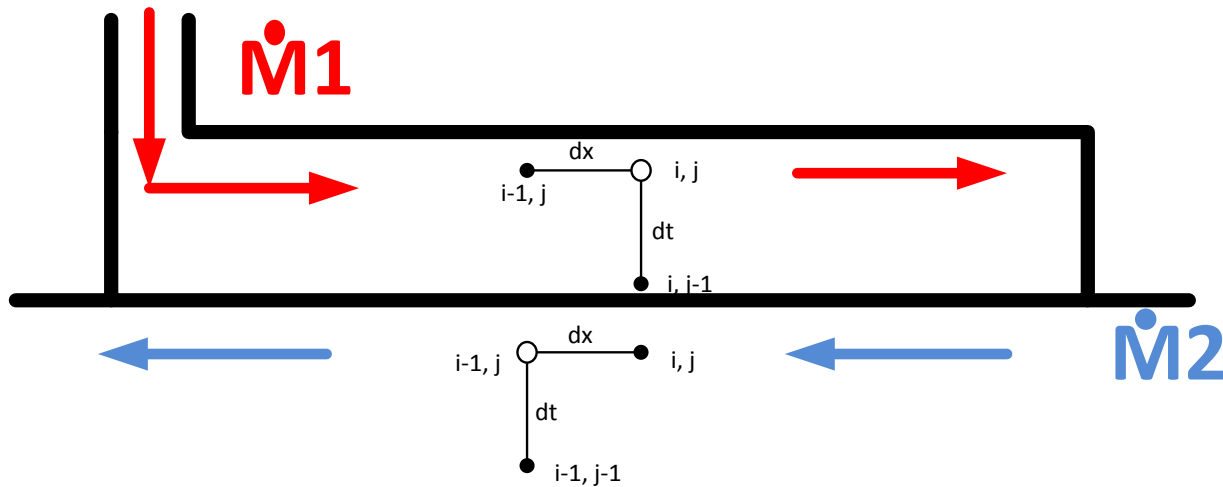


Fig. 3.4, discretización de las diferencias finitas implícitas para cada fluido.

Nos faltaría la discretización en el muro pero esta es mucho más sencilla dado que gracias a las hipótesis simplificativas esta es constante dentro de un elemento diferencial de x , por lo que la discretización es una línea donde conocemos $(i, j-1)$ y queremos resolver para obtener el nodo (i, j) .

Puesto que hemos organizado nuestras temperaturas en el código de manera que el tiempo avanza en las filas y la longitud en las columnas, y sabiendo que el tiempo tiene subíndice j y la longitud i en las ecuaciones; la matriz $T1$ por ejemplo tendrá los índices organizados como $T1(j, i)$. Donde lo que es conocido es la fila correspondiente con $j=1$ (tiempo cero, ya que los vectores en matlab no tienen índice nulo y comienzan en 1 como primer valor), donde todas las temperaturas en ambos fluidos y el muro serán del valor de temperatura inicial, T_{ini} . La otra condición que conocemos es la de entrada de los fluidos al intercambiador, por un lado la del fluido 1, $T1(j, 1)$, que será T_{step} ya que es donde aplicamos un salto de temperaturas al ser este el fluido que hemos elegido como fluido caliente; y la entrada del fluido 2, $T2(j, N+1)$ donde la temperatura no se ha enterado del salto y sigue siendo T_{ini} . Cabe señalar que al ser contracorriente el fluido frío, $T2$, entra por el final en lo que sería el punto N (recordar $N=L/dx$ y por tanto N es el número de porciones y, por ende, con N hacemos referencia al último tramo del intercambiador), pero aplicamos un paso más, $N+1$, dado que tampoco empezábamos en 0, sino en 1, que es el primer valor que puede tomar el vector en matlab.

Así pues, si consideramos un intercambiador de longitud 1, con $dx=0.25$ por ejemplo, donde por lo tanto $N=4$. Con tres escalones de tiempo dt , que darían lugar a un tiempo total de $T=3*dt$. Las temperaturas de cada fluido corresponderían con las siguientes matrices:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|-----------|-----------|-----------|-----------|---|-----------|-----------|-----------|-----------|--|-----------|-----------|-----------|-----------|
| T_{ini} | T_{ini} | T_{ini} | T_{ini} | T_{ini} | T_{ini} | T_{ini} | T_{ini} | T_{ini} | T_{ini} | T_{ini} | T_{ini} | T_{ini} | T_{ini} | T_{ini} |
| T_{step} | $T1_2^2$ | $T1_3^2$ | $T1_4^2$ | $T1_5^2$ | $T2_1^2$ | $T2_2^2$ | $T2_3^2$ | $T2_4^2$ | T_{ini} | Tw_2^2 | Tw_3^2 | Tw_4^2 | Tw_5^2 | |
| T_{step} | $T1_2^3$ | $T1_3^3$ | $T1_4^3$ | $T1_5^3$ | $T2_1^3$ | $T2_2^3$ | $T2_3^3$ | $T2_4^3$ | T_{ini} | Tw_2^3 | Tw_3^3 | Tw_4^3 | Tw_5^3 | |
| T_{step} | $T1_2^4$ | $T1_3^4$ | $T1_4^4$ | $T1_5^4$ | $T2_1^4$ | $T2_2^4$ | $T2_3^4$ | $T2_4^4$ | T_{ini} | Tw_2^4 | Tw_3^4 | Tw_4^4 | Tw_5^4 | |
| Matriz de la discretización de las temperaturas para fluido 1 | | | | | Matriz de la discretización de las temperaturas para fluido 2 | | | | | Matriz de la discretización de las temperaturas del muro | | | | |

Cabe señalar a su vez, que los subíndices del muro se han mantenido como los que aparecen en la temperatura 1 cuando se podrían haber reducido un número dado que no son necesarios N+1 guarismos al no tener dx en su diferencial. Se ha optado por esto al desarrollar nuestro algoritmo para respetar el criterio dado por la ecuación discretizada anteriormente, dejando sin usar por tanto la primera columna.

Vemos que tenemos 36 incógnitas, lo que corresponde a $3 \cdot N \cdot T/dt = 36$. Por lo tanto necesitamos resolver un sistema de 36 ecuaciones. Al ser un algoritmo de diferencias implícitas, se ha de resolver el intercambiador en toda su longitud de una sola vez para un intervalo de tiempo. Por lo que, como tenemos N=4 secciones ($dx=0.25 \cdot L$), y en cada sección 3 ecuaciones, tenemos que resolver 12 incógnitas para cada intervalo de tiempo.

Ahora estamos en condiciones de volver al sistema planteado, y elaborar el código que lo resuelva. El sistema se discretizó como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} T1_i^j \left(\frac{D1}{\Delta t} + \frac{L1}{\Delta x} + 1 \right) - Tw_i^j = T1_i^{j-1} \frac{D1}{\Delta t} + T1_{i-1}^j \frac{L1}{\Delta x} \\ T2_{i-1}^j \left(\frac{D2}{\Delta t} + \frac{L2}{\Delta x} + 1 \right) - Tw_i^j = T2_{i-1}^{j-1} \frac{D2}{\Delta t} + \frac{L2}{\Delta x} \\ Tw_i^j \left(\frac{Dw}{\Delta t} + 1 \right) - \frac{h1 d T1_i^j + h2 (d - 2e) T2_{i-1}^j}{h1 d + h2 (d - 2e)} = Tw_i^{j-1} \frac{Dw}{\Delta t} \end{array} \right.$$

Debemos llegar a una organización matricial que permita resolver debemos resolver de una tacada el intercambiador entero, en toda la longitud, para cada diferencial de tiempo. Si usamos solo cuatro pasos como en este ejemplo, el sistema queda 12x12, pero con diferenciales de x muy pequeños la dimensión de la matriz, y el tiempo para resolverla, aumenta enormemente. En cada tramo de tiempo analizado, el sistema de ecuaciones a resolver se organiza matricialmente como sigue para su resolución:

$$\begin{pmatrix}
 \frac{D1}{\Delta t} + \frac{L1}{\Delta x} + 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{D2}{\Delta t} + \frac{L2}{\Delta x} + 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -C1 & -C2 & \frac{Dw}{\Delta t} + 1 & \frac{D1}{\Delta t} + \frac{L1}{\Delta x} + 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{L1}{\Delta x} & 0 & 0 & \frac{D2}{\Delta t} + \frac{L2}{\Delta x} + 1 & -1 & \frac{D1}{\Delta t} + \frac{L1}{\Delta x} + 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -C1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -C2 & \frac{Dw}{\Delta t} + 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{L1}{\Delta x} & 0 & -C1 & \frac{D2}{\Delta t} + \frac{L2}{\Delta x} + 1 & -1 & \frac{D1}{\Delta t} + \frac{L1}{\Delta x} + 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 T_{12}^{12} \\
 T_{21}^{12} \\
 T_{w2}^{12} \\
 T_{13}^{12} \\
 T_{22}^{12} \\
 T_{w3}^{12} \\
 T_{12}^{12} \\
 T_{23}^{12} \\
 T_{w4}^{12} \\
 T_{15}^{12} \\
 T_{24}^{12} \\
 T_{w5}^{12}
 \end{pmatrix}
 *
 =
 \begin{pmatrix}
 \frac{D1}{\Delta t} + \frac{L1}{\Delta x} + 1 & \frac{D2}{\Delta t} & \frac{Dw}{\Delta t} & \frac{D1}{\Delta t} + \frac{L1}{\Delta x} + 1 & \frac{D2}{\Delta t} + \frac{L2}{\Delta x} + 1 & \frac{Dw}{\Delta t} + 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{D2}{\Delta t} + \frac{L2}{\Delta x} + 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -C1 & -C2 & \frac{Dw}{\Delta t} + 1 & \frac{D1}{\Delta t} + \frac{L1}{\Delta x} + 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{L1}{\Delta x} & 0 & 0 & \frac{D2}{\Delta t} + \frac{L2}{\Delta x} + 1 & -1 & \frac{D1}{\Delta t} + \frac{L1}{\Delta x} + 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -C1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -C2 & \frac{Dw}{\Delta t} + 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{L1}{\Delta x} & 0 & -C1 & \frac{D2}{\Delta t} + \frac{L2}{\Delta x} + 1 & -1 & \frac{D1}{\Delta t} + \frac{L1}{\Delta x} + 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 T_{12}^{12} \\
 T_{21}^{12} \\
 T_{w2}^{12} \\
 T_{13}^{12} \\
 T_{22}^{12} \\
 T_{w3}^{12} \\
 T_{12}^{12} \\
 T_{23}^{12} \\
 T_{w4}^{12} \\
 T_{15}^{12} \\
 T_{24}^{12} \\
 T_{w5}^{12}
 \end{pmatrix}$$

Con:

$$C1 = \frac{h1 d}{h1 d + h2 (d - 2e)} ; \quad C2 = \frac{h2 (d - 2e)}{h1 d + h2 (d - 2e)}$$

Para resolver la matriz tenemos varias maneras. Se puede resolver por el método de Gauss de manera sencilla. Sólo tenemos que situar la última columna adyacente a las 12 primeras formando una matriz de 12x13, y convertirla en una matriz identidad de 12x12 cuya última columna representa la solución del sistema.

En Matlab podemos resolverlo como $A^{-1} \cdot b$, o como $A \setminus b$ o de muchas otras maneras. La manera en que lo hemos resuelto en este caso ha sido mediante la función RREF (*Row Reduced Echelon Form*) que equivale a usar el método de Gauss. Después asignamos los valores de las temperaturas en el orden en que aparecen en la matriz.

Para resolverlo en el tiempo tenemos que repetir el sistema para cada diferencial de tiempo. Podemos por tanto cambiar las condiciones de entrada y temperaturas para obtener el comportamiento dinámico del intercambiador.

En este caso, hemos mantenido las propiedades de los fluidos constantes, cogiendo la viscosidad, calor específico y densidad medias para los dos fluidos en todo el proceso. Pero podríamos ser más rigurosos y cambiar las propiedades en cada intervalo de tiempo. Se calcularía la temperatura media a lo largo del intercambiador y se recalcularía una vez resuelto el mismo, para el siguiente dt .

3.2.4. Estimación del error y condición CFL

Hay que hacer una última aclaración acerca de este método que debe ser tenida en cuenta antes de programar el algoritmo. Como se cuenta en [5], hay que ser cuidadoso a la hora de elegir los intervalos de tiempo e incrementos de longitud ya que, para valores muy pequeños de estos sabemos que la solución es casi exacta, pero para valores grandes la solución se va alejando. En concreto, estos métodos corren el riesgo de presentar problemas de dispersión y que la solución no sea válida.

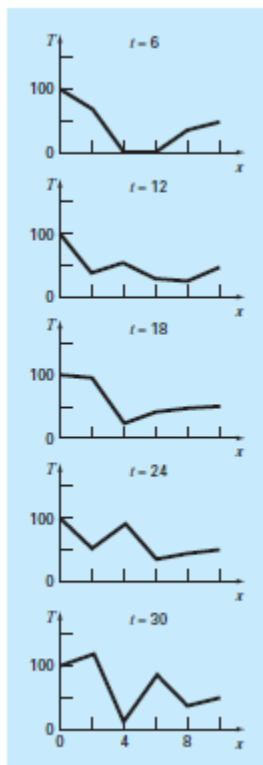


Fig 3.5, *Ejemplo de inestabilidad en la solución al incrementar el intervalo de tiempo en la resolución de un algoritmo de diferencias finitas.* (fuente [5])

Cuando el algoritmo se aplica correctamente y se programa sin errores, la convergencia está asegurada [5]. Ello quiere decir que según Δx y Δt se aproximan a cero, el resultado se aproxima, converge, a la solución verdadera.

Sin embargo, podemos encontrarnos otro problema incluso aplicando correctamente el método, que es el de inestabilidad. Quiere decir que los errores se amplifican según progresa la computación como muestra la figura 3.5, en vez de atenuarse.

Para evitar esto debe cumplirse la condición de Courant–Friedrichs–Lewy, o condición CFL [11]. Esta condición impone el intervalo de tiempo máximo que puede aplicarse para este tipo de ecuaciones diferenciales. Estos tres matemáticos alemanes descubrieron un número adimensional, llamado en su honor número de Courant, que debe ser tenido en cuenta para definir los algoritmos de resolución numérica para ecuaciones en derivadas parciales. Este número tiene un valor máximo que depende del sistema, a partir del cual el sistema se vuelve inestable en su resolución. Típicamente, y en este caso, ese valor es 1. Luego la condición se escribe como sigue

$$C = u \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq C_{max} = 1$$

Donde u es la velocidad del fluido. Recordamos que esta velocidad era igual a $L1/D1$ y $L2/D2$, para cada uno de los fluidos. En este caso, como tenemos dos fluidos cuyas velocidades

no tienen por qué coincidir, escogeremos la que haga un dt menor, por lo que para asegurarnos que el algoritmo es estable, cumpliremos lo siguiente:

$$dt \leq \min\left(\frac{D1}{L1}, \frac{D2}{L2}\right) * dx$$

Lo que nos está imponiendo esta condición es que el código no puede avanzar en el intercambiador más rápido de lo que lo hace el propio fluido. Lo que parece bastante de sentido común.

Después de probar para varios valores de dt , se ha comprobado que el valor más óptimo es utilizar un Courant igual a 1. Es decir que el código avance con la velocidad del fluido. Cuando se bajaba este número a por ejemplo 0.1, que quiere decir que avanzamos 10 veces más rápido, en realidad comprobamos que el error era el mismo y que lo único que conseguíamos era incrementar el tiempo de computación. Lo más óptimo es establecer el dt imponiendo Courant igual a 1:

$$dt = \min\left(\frac{D1}{L1}, \frac{D2}{L2}\right) * dx$$

El error que se comete con este método puede ser estimado como dijimos en el punto 3.2.1. En este caso lo marca el número de secciones en que dividamos el intercambiador, ya que cumpliendo con la condición CFL, el Δt hemos comprobado que no nos añade error en la solución. Por tanto, como sabemos que el error es del orden del Δx , dado que hemos aplicado un método basado en diferencias finitas de primer orden, sabemos que si por ejemplo, dividimos el intercambiador el 100 secciones, con un $dx=0.01L$; el error en el incremento de temperatura, ΔT , será del orden del 1%.

3.2.5. Diferencias finitas explícitas de primer orden

El método anterior produce soluciones bastante exactas, pero a costa de demasiado tiempo de computación. Intentaremos producir un algoritmo basado en métodos numéricos que, sin perder demasiada precisión, optimice los tiempos de cálculo.

Para ello, partimos del sistema de ecuaciones que planteamos anteriormente en el punto 3.1, queda como sigue implementando el esquema propuesto:

$$\begin{cases} D1 \frac{T1_i^j - T1_i^{j-1}}{\Delta t} + L1 \frac{T1_i^j - T1_{i-1}^j}{\Delta x} + T1_i^j = Tw_i^j \\ D2 \frac{T2_{i-1}^j - T2_{i-1}^{j-1}}{\Delta t} + L2 \frac{T2_{i-1}^j - T2_i^j}{\Delta x} + T2_{i-1}^j = Tw_i^j \\ Dw \frac{Tw_i^j - Tw_i^{j-1}}{\Delta t} + Tw_i^j = \frac{h1 d T1_i^j + h2 (d - 2e) T2_{i-1}^j}{h1 d + h2 (d - 2e)} \end{cases}$$

En el método implícito resolvíamos la totalidad del intercambiador en cada iteración. Ello implicaba que, si por ejemplo tomábamos $N=100$, ósea dividimos el intercambiador en 100 elementos, necesitábamos resolver un sistema de 300 ecuaciones con 300 incógnitas, lo que conlleva resolver una matriz de 300×301 en cada intervalo de tiempo. Ello conlleva un tiempo de computación excesivo y necesitamos algoritmos más eficientes para poder implementar sistemas de control en tiempo real.

La primera optimización que vamos a proponer es una variante explícita del método de las diferencias finitas. De esa manera sólo resolvemos sistemas de 3 ecuaciones para cada elemento diferencial de longitud y de tiempo, pero a costa de repetir el proceso más veces. A nivel de tiempo de cálculo, este método acorta los tiempos considerablemente.

Para poder hacer el sistema explícito, hacemos una hipótesis extra. Lo que haremos será suponer que la temperatura del fluido 2, en la entrada al volumen diferencial en el tiempo dado, difiere poco de esa misma temperatura en el tiempo anterior, que sí que es conocida. Por tanto, consideramos que el incremento de temperatura en el fluido 2, en un intervalo de tiempo dt pequeño, será aproximadamente igual al que tiene lugar en un tiempo anterior. De esa manera, reordenamos el sistema y lo reformulamos como sigue:

$$\begin{cases} T1_i^j \left(\frac{D1}{\Delta t} + \frac{L1}{\Delta x} + 1 \right) - Tw_i^j = T1_i^{j-1} \frac{D1}{\Delta t} + T1_{i-1}^j \frac{L1}{\Delta x} \\ T2_{i-1}^j \left(\frac{D2}{\Delta t} + \frac{L2}{\Delta x} + 1 \right) - Tw_i^j = T2_{i-1}^{j-1} \frac{D2}{\Delta t} + T2_i^{j-1} \frac{L2}{\Delta x} \\ Tw_i^j \left(\frac{Dw}{\Delta t} + 1 \right) - \frac{h1 d T1_i^j + h2 (d - 2e) T2_{i-1}^j}{h1 d + h2 (d - 2e)} = Tw_i^{j-1} \frac{Dw}{\Delta t} \end{cases}$$

El esquema de diferencias finitas para aplicar al logaritmo, queda de la siguiente manera:

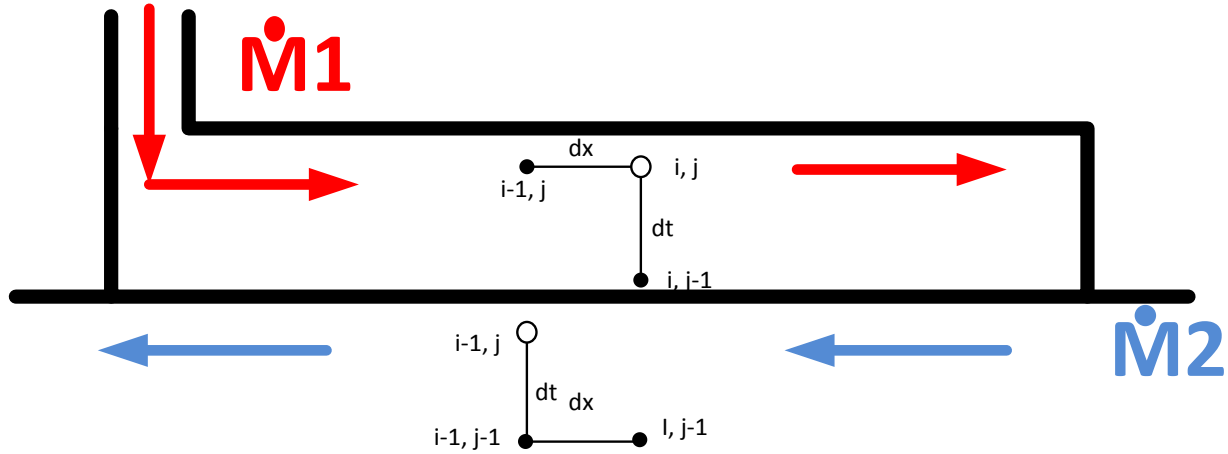


Fig. 3.6, discretización de las diferencias finitas explícitas para cada fluido.

Sólo queda ponerlo en su forma matricial para resolverlo fácilmente. Procedemos igual a como hicimos en el método implícito. Sólo que en este caso queda bastante más sencillo

$$\begin{pmatrix} \frac{D1}{\Delta t} + \frac{L1}{\Delta x} + 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{D2}{\Delta t} + \frac{L2}{\Delta x} + 1 & -1 \\ \frac{-h1 d}{h1 d + h2 (d - 2e)} & \frac{-h2 (d - 2e)}{h1 d + h2 (d - 2e)} & \frac{Dw}{\Delta t} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T1_i^j \\ T2_{i-1}^j \\ Tw_i^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T1_i^{j-1} \frac{D1}{\Delta t} + T1_{i-1}^j \frac{L1}{\Delta x} \\ T2_{i-1}^{j-1} \frac{D2}{\Delta t} + T2_i^{j-1} \frac{L2}{\Delta x} \\ Tw_i^{j-1} \frac{Dw}{\Delta t} \end{pmatrix}$$

Por lo que para resolver el sistema, debemos conseguir la matriz reducida escalonada por filas, RREF (Row Reduced Echelon Form), de la siguiente matriz:

$$rref \begin{pmatrix} \frac{D1}{dt} + \frac{L1}{dx} + 1 & 0 & -1 & D1 * \frac{T1(j-1,i)}{dt} + L1 * \frac{T1(j,i-1)}{dx} \\ 0 & \frac{D2}{dt} + \frac{L2}{dx} + 1 & -1 & D2 * \frac{T2(j-1,i-1)}{dt} + L2 * \frac{T2(j-1,i)}{dx} \\ \frac{-h1 d}{h1 d + h2 (d - 2e)} & \frac{-h2 (d - 2e)}{h1 d + h2 (d - 2e)} & \frac{Dw}{\Delta t} + 1 & \frac{Dw}{\Delta t} Tw(j-1,i) \end{pmatrix}$$

Cuando aplicamos la función RREF, del paquete matemático Matlab 2011, conseguimos una matriz de las mismas dimensiones donde tenemos las soluciones del sistema en la última columna y una matriz identidad de 3x3 en las columnas restantes.

Asignamos al nodo $T1(j, i)$ el valor de la primera fila en la última columna de la matriz obtenida, al elemento $T2(j, i-1)$ el de la segunda y para el $Tw(j, i)$ el de la última. De este modo ya habríamos resuelto el elemento diferencial y avanzaríamos al siguiente elemento hasta completar la longitud del intercambiador (L). Después pasamos al siguiente tiempo hasta que detenemos el código pasado un tiempo total igual a (T).

En caso de necesitar un tiempo de simulación mayor se puede reiniciar el algoritmo empezando por el punto donde detuvimos el tiempo anterior y así conseguimos la solución en tiempos mayores. También se pueden, en este caso, cambiar las propiedades del fluido a lo largo del intercambiador. Ello puede ser útil para intercambiadores grandes donde la variación de la viscosidad, por ejemplo, no sea despreciable.

Posteriormente, cuando presentemos los resultados, veremos que el error cometido sobre el fluido 1 es muy pequeño. Y sobre el otro fluido, lo que ocurre, es un pequeño retraso respecto de la evolución de las temperaturas antes de alcanzar el estacionario, pero se alcanza la estabilidad en un tiempo similar y la temperatura final prácticamente no varía, por lo que el error de utilizar este método es también asumible.

3.3 Solución analítica

El sistema tal y como está planteado no tiene una solución conocida que pueda obtenerse de forma directa, pero varios matemáticos han planteado diferentes aproximaciones basadas en la transformada de Laplace que proporcionan soluciones aproximadas. Aquí emplearemos un modelo propuesto por los matemáticos Ansari y Mortazavi en 2006 en su artículo [1]. El algoritmo que ellos proponen presenta una fuerte carga analítica lo que reduce los tiempos de computación en los cálculos.

Para resolver el sistema, y aunque hemos llamado a esta solución “analítica”, procederemos rebanada a rebanada para encontrar soluciones dentro de un elemento diferencial de x e ir elemento a elemento resolviendo el sistema. Esto es lo que haríamos al emplear cualquier otro método numérico pero en este caso la diferencia estriba en que resolvemos ese elemento analíticamente desde una serie de hipótesis.

La primera es suponer que la temperatura a lo largo de cada elemento diferencial en el muro, T_w , varía sólo en el tiempo y es constante en la longitud Δx . Esta asunción parece lógica observando el balance de energía ya que no aparecen diferenciales de x en el balance para el muro. Por ello, en [4] una manera de eliminar la ecuación del muro y proponer la siguiente solución dado que sabemos que la temperatura en el muro obedece a un sistema de primer orden:

$$T_w(t) = T_{wm}(0) + D_w \theta (1 - e^{-t/D_w})$$

La suposición está bastante justificada y nos permite reducir el sistema a sólo dos ecuaciones diferenciales.

El subíndice M , a lo largo de este apartado, significará que debemos tomar el valor medio a lo largo de la longitud del elemento. Y el parámetro θ , es el coeficiente de variación de temperatura en el tiempo, con unidades $[^{\circ}\text{K} / \text{s}]$, un parámetro que de momento no conocemos.

La segunda hipótesis es considerar que los coeficiente D_L y θ son constantes dentro de cada elemento Δx en un Δt . Esto ya fue supuesto para nuestros algoritmos numéricos y no suponen un problema.

Por último, haremos dos consideraciones respecto de las condiciones iniciales y de contorno: las condiciones iniciales de ambos fluidos y el muro serán constantes dentro del elemento, lo que significa que en tiempo igual a cero las condiciones iniciales son constantes y conocidas para todo el elemento, algo que ya fue supuesto en los métodos numéricos; respecto de las condiciones de contorno a la entrada de cada elemento en un tiempo $t > 0$ pero $t < \Delta t$, supondremos que si el Δt es pequeño, cualquier variación en el tiempo o en la longitud, se puede aproximar con una función lineal. Esto último hemos comprobado que no funciona bien para condiciones donde los cambios se producen rápidamente.

Así, nos quedan las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} D1 \frac{\partial T1}{\partial t} + L1 \frac{\partial T1}{\partial x} + T1 = T_{wm}(0) + D_w \theta (1 - e^{-t/D_w}) \\ D2 \frac{\partial T2}{\partial t} - L2 \frac{\partial T2}{\partial x} + T2 = T_{wm}(0) + D_w \theta (1 - e^{-t/D_w}) \end{cases}$$

Resolvemos aplicando transformada de Laplace sobre la primera ecuación. La segunda se resolverá de la misma manera. Aplicando las propiedades de la transformada de Laplace, que podemos encontrar en [13] y que vimos en la asignatura Calculo III, de manera directa respecto de la variable t:

$$(D s + 1) \mathcal{L}_t\{T\}(s) + L \frac{\partial \mathcal{L}_t\{T\}(s)}{\partial x} = \frac{T_{wm}(0)}{s} + D_w \theta \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{D_w}} \right) + D * Tm(0)$$

Donde Tm(0) es la condición inicial que sale de la derivada respecto del tiempo y que después de aplicar Laplace queda como T(x, 0). En el código lo programamos como la temperatura media entre los nodos inicial y final, para el tiempo anterior. Todo conocido.

Ahora, simplificamos la notación con:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t\{T\}(s) &= \check{T} \\ z &= \frac{T_{wm}(0)}{s} + D_w \theta \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{D_w}} \right) + D * Tm(0) \end{aligned}$$

Y ejecutamos la transformada respecto de la variable x:

$$(D s + 1) \mathcal{L}_x\{\check{T}\}(p) + L \left(p \mathcal{L}_x\{\check{T}\}(p) - \check{T}(0, s) \right) = \frac{z}{p}$$

Reorganizamos:

$$\mathcal{L}_x\{\check{T}\}(p) = \frac{\frac{z}{p} + L \check{T}(0, s)}{(D s + L p + 1)}$$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa de Laplace:

$$\check{T} = \mathcal{L}_t\{T\}(s) = e^{-\frac{x}{L}} \check{T}(0, s) e^{-D s \frac{x}{L}} - \frac{z}{(D s + 1)} e^{-(D s + 1) \frac{x}{L}} + \frac{z}{(D s + 1)}$$

En este paso, aplicamos la propiedad de desplazamiento temporal de la transformada de Laplace:

$$\check{T}(0, s) e^{-D s \frac{x}{L}} = \mathcal{L}_t\{T(0, s)\} e^{-D s \frac{x}{L}} = \mathcal{L}_t\left\{u\left(t - \frac{D}{L} x\right) T\left(0, t - \frac{D}{L} x\right)\right\}(s)$$

Donde u es la función de Heaviside, que nos define la posición de la ola de calor dado que esta avanza con una velocidad de L/D como se especificó en el punto 3.1. En este caso definimos la función de Heaviside en el código como:

$$u\left(t - \frac{D}{L}x\right) = 1 \text{ if } t - \frac{D}{L}x \geq 0$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace por última vez, respecto de la variable t , conseguimos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} T(x, t) = & T_M(0) \cdot e^{-\frac{t}{D}} \left[1 - u\left(t - \frac{D}{L}x\right) \right] + \left[T(0,0) + \varphi_M\left(t - \frac{D}{L}x\right) \right] \cdot e^{-\frac{x}{L}} u\left(t - \frac{D}{L}x\right) \\ & + T_{WM}(0) \left[1 - e^{-\frac{t}{D}} - e^{-\frac{x}{L}} \left(1 - e^{-\frac{t}{D} + \frac{x}{L}} \right) \cdot u\left(t - \frac{D}{L}x\right) \right] \\ & + \frac{D_W \theta}{D - D_W} \left\{ D \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{D}} \right) - D_W \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{D_W}} \right) \right. \\ & \left. - e^{-\frac{x}{L}} \left[D \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{D} + \frac{x}{L}} \right) - D_W \left(1 - e^{-\frac{t}{D_W} + \frac{D}{D_W} \cdot \frac{x}{L}} \right) \right] \cdot u\left(t - \frac{D}{L}x\right) \right\} \end{aligned}$$

Cabe destacar que se ha hecho uso de la condición de contorno que se propuso anteriormente, para suponer incrementos lineales en pequeños incrementos de tiempo. Así, hemos definido $T(0, t - D/L x)$ como $T(0, 0) + \varphi_m(t - D/L x)$, donde φ será la pendiente de la evolución lineal.

Hemos conseguido una expresión analítica de la temperatura 1. Para la temperatura 2 se hace exactamente igual pero cambiando de signo donde aparece L , o bien, como se ha hecho, iterando el código para la temperatura 2 en la otra dirección, es decir, en la dirección en que avanza ese fluido. Haciendo eso utilizaríamos la misma expresión en ambos fluidos. Como avanzamos en incrementos, sustituiremos la x y la t por Δx y Δt para conocer la temperatura al final de cada nodo.

Sólo nos queda determinar θ y φ , que es lo único que no conocemos. Determinar φ es más o menos directo, ya que es la pendiente del incremento de temperatura entre $T(j-1, i-1)$ y $T(i, j)$ dividido entre el incremento de tiempo. Tenemos varios modos, pero dado que no conocemos aún la temperatura en el nodo i, j , y a sugerencia de [1]; lo que funciona mejor es usar el φ_m del nodo $i-1, j-1$, que si es conocido.

Para determinar θ usamos un balance de energía:

$$\Delta Q_W = \Delta Q_1 - \Delta Q_2$$

Donde integramos las temperaturas entre 0 y Δx o Δt , según corresponda. Teniendo cuidado al introducir Heaviside en las integrales. El procedimiento es sencillo pero bastante tedioso, y nos devuelve lo siguiente:

$$\begin{aligned}\theta &= F \left[\left(\frac{h_1 U_1}{h_1 U_1 + h_2 U_2} \right) \alpha_1 + \left(\frac{h_1 U_1}{h_1 U_1 + h_2 U_2} \right) \left(\frac{L_2 D_2}{L_1 D_1} \right) \alpha_2 \right] \\ F &= \frac{D_1}{D_w} \cdot \frac{L_1}{\Delta x} \cdot \frac{1}{D_w} \left/ \left\{ 1 - e^{-\Delta x/D_w} + \left[\left(\frac{h_1 U_1}{h_1 U_1 + h_2 U_2} \right) \cdot \beta_1 \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{h_2 U_2}{h_1 U_1 + h_2 U_2} \right) \left(\frac{L_2 D_2}{L_1 D_1} \right) \cdot \beta_2 \right] \frac{L_1}{\Delta x} \cdot \frac{D_1}{D_w} \right\} \right. \\ \beta &= \left[\frac{\Delta t}{D} - \frac{\Delta x}{L} - 1 + \frac{1 + (D_w/D)^2}{1 - (D_w/D)} \right] (1 - e^{-\Delta x/L}) + \frac{2(D_w/D)^2}{1 - D_w/D} (e^{-(\Delta x/L)(D/D_w)} - 1) \\ &\quad + \frac{(D_w/D)}{1 - D_w/D} \frac{\Delta x}{L} \cdot e^{-(\Delta x/D_w)} - \frac{(D_w/D)^3}{(1 - D_w/D)^2} [e^{(\Delta x/L)(D/D_w - 1)} - 1] \cdot e^{-(\Delta x/D_w)} \\ \alpha &= B[T_M(0) - T_{w_M}(0)] + E[T(0,0) - T_{w_M}(0)] + G \cdot \phi_M \\ B &= \frac{\Delta x}{L} - (1 - e^{-\Delta x/L}) \\ E &= \frac{\Delta x}{L} e^{-\Delta x/L} + \left(\frac{\Delta t}{D} - 1 \right) (1 - e^{-\Delta x/L}) \\ G &= \left[\frac{\Delta t^2}{2D} + D - \Delta t \right] (1 - e^{-\Delta x/L}) \\ &\quad + e^{-\Delta x/L} \left[(\Delta t - D) \frac{\Delta x}{L} - \frac{D}{2} \left(\frac{\Delta x}{L} \right)^2 \right]\end{aligned}$$

La fórmula queda bastante compleja, pero el código es bastante rápido ya que es una fórmula explícita que devuelve un resultado de manera directa sin tener que hacer nada más.

A continuación aplicaremos estos algoritmos para modelos donde tenemos los resultados experimentales, con el fin de validar los resultados de forma fiable. Después introduciremos las condiciones reales de trabajo de los intercambiadores de una central termosolar, para así determinar su comportamiento dinámico ante variaciones de flujo o temperatura y determinar una estimación más o menos fiable de los tiempos que requiere el sistema para estabilizarse.

4. Estudio experimental

4.1 Validación de los modelos

Ahora que tenemos varios modelos que resuelven las ecuaciones que gobiernan el comportamiento dinámico de los intercambiadores de calor que podemos encontrarnos en una central termosolar, el primer paso será validar los resultados que ofrecen antes de fiarnos a ciegas de ellos. Para ello nos basaremos en los resultados experimentales en un laboratorio del Instituto Nacional de Ciencias Aplicadas de Rouen (INSA), que están recogidos en [2]; así como contrastaremos los resultados con los que podríamos esperar a priori. También se compararan con las gráficas de [1] para tener varias referencias fiables que nos den seguridad en los resultados.

Para ello, seguiremos el orden propuesto en [1], primero simularemos un cambio en las temperaturas y comprobaremos el comportamiento del intercambiador. Después haremos lo propio con los caudales máscicos. Los cambios se aplican como un paso, *step*, donde las temperaturas o caudales cambian de repente a partir de un momento en el tiempo. Nuestro código nos permite simular evoluciones en el tiempo pero este caso recoge la manera más genérica de probar las ecuaciones.

Una vez tengamos los modelos validados, procederemos a usarlos para las simulaciones de los intercambiadores en sí, determinando los tiempos necesarios para conseguir variaciones de potencia en la central.

4.1.1 Respuesta ante el cambio de temperatura

La primera prueba que hemos hecho para comprobar que nuestros algoritmos funcionan, es hacer un cambio de temperaturas en uno de los fluidos y comprobar que ocurre a lo largo del intercambiador según pasa el tiempo.

Para ello empezamos en parado, con todos los fluidos a la misma temperatura, e introducimos un cambio, T_{step} , en el fluido 1 que será por tanto el fluido caliente.

Hemos definido los distintos parámetros de modo y manera que cumplan las especificaciones dadas en [1], donde se han dado las siguientes parametrizaciones a modo de referencia para comparar resultados:

$$NTU = \left(\frac{1}{h_1 \pi d_1 L} + \frac{1}{h_2 \pi d_2 L} \right)^{-1} \frac{1}{\dot{M}_{min} C p_{min}} = \frac{L}{L1 + L2 \left(\frac{\dot{M}_{min} C p_{min}}{\dot{M}_{max} C p_{max}} \right)} = 1$$

$$R^* = \frac{h_1 d_1}{h_2 d_2} = 1$$

$$C^* = \frac{\dot{m}_1 C p_1}{\dot{m}_2 C p_2} = 1$$

$$C_w^* = \frac{m_w C p_w}{m_1 C p_1} = \begin{cases} \text{caso 1} = 0.5 \\ \text{caso 2} = 1 \\ \text{caso 3} = 5 \\ \text{caso 4} = 10 \end{cases}$$

Donde NTU es *Number of Transfer Units*, un parámetro que usamos para medir la eficiencia de la transferencia de calor en el intercambiador ya que compara la transferencia de calor por convección con la capacidad térmica del fluido. Si es alto, quiere decir que hay un valor alto de transferencia de calor, o bien un bajo calor específico que permite calentar rápidamente el fluido frío.

Hemos elegido unas temperaturas de 50 grados centígrados para Tini y 100 para Tstep. Los parámetros h, ρ, μ, d, c y \dot{m} se han definido iguales para los dos fluidos por simplicidad, de manera que cumplimos las dos primeras condiciones. Y el área del muro se ha elegido en función de la tercera. De manera que cuando aumenta C*w, lo que ocurre es que hacemos más grueso el muro, acumulando más calor en el mismo y haciendo que la temperatura de los fluidos tarde más tiempo en alcanzar el estacionario.

Graficamos la evolución de la temperatura con el tiempo para la salida del intercambiador del fluido caliente y del fluido frío. Para presentar los resultados se han adimensionalizado los ejes de la siguiente manera:

$$\text{eje y: } T^* = \frac{T - T_{c_w^* 05_i}}{T_{c_w^* 05_f} - T_{c_w^* 05_i}}$$

$$\text{eje x: } t^* = t * \frac{V1}{L} = t * \frac{L1}{D1 * L}$$

En las temperaturas hemos usado las referencias de entrada y salida del caso 1, Crw=0.05, para la adimensionalización. Para el tiempo se ha usado la velocidad del fluido 1 con la longitud del intercambiador. El resultado se presenta en la Fig 4.1:

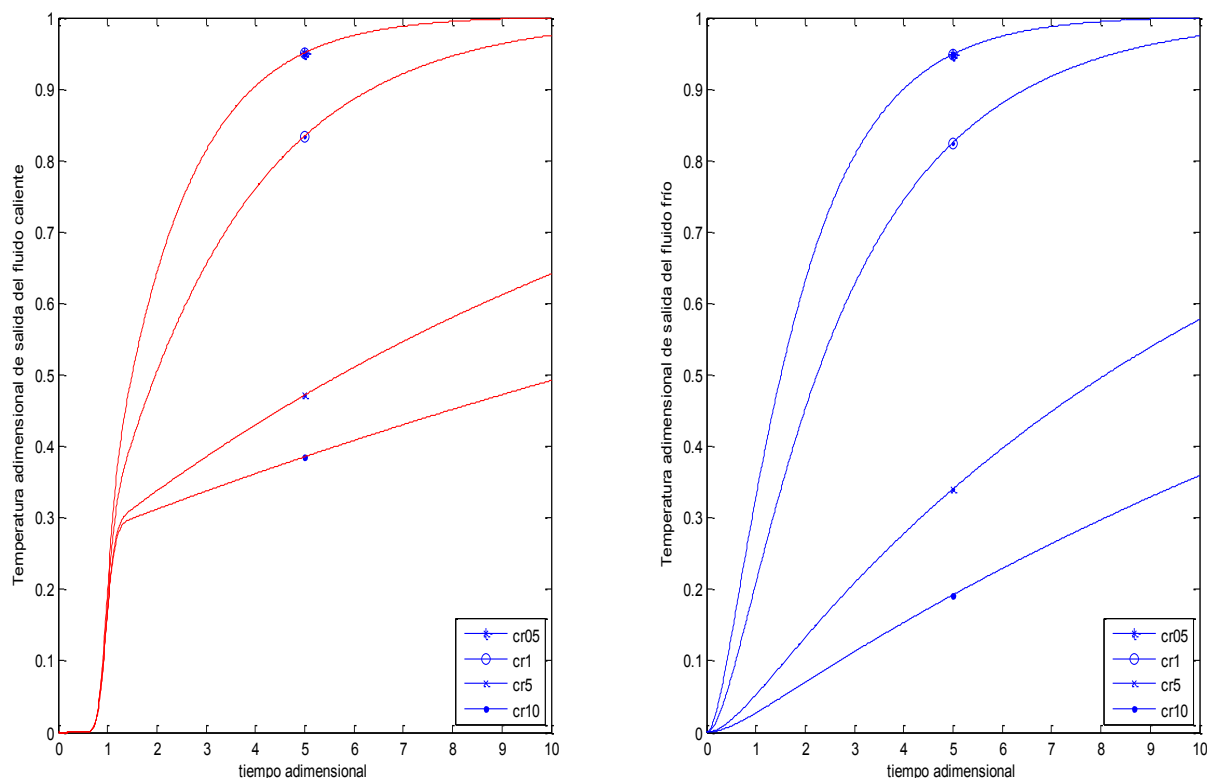


Fig 4.1 Gráfica de las temperaturas frente al tiempo con una subida de temperatura del fluido 1 para diferentes valores de C^*w

En la figura se aprecia como la temperatura de salida del fluido frío aumenta regularmente hasta que se alcanza el estado estacionario. Pero la temperatura de salida del fluido caliente aumenta con un salto. Esto se debe a que la ola de calor en el fluido uno se propaga con velocidad $L1/D1$, y por tanto llega al final del tubo en el momento t adimensional igual a 1 y, es entonces, cuando se da el salto de temperaturas en ese punto. Por lo tanto el comportamiento es como cabría esperar. El pequeño incremento de temperatura que se da en el fluido caliente antes de que le llegue la ola de calor, es causado según [1] por efecto de la temperatura de entrada del fluido frío que se ha incrementado un poco antes de que la ola alcance el fluido caliente, transfiriendo algo de calor por tanto.

Observamos también como cuando subimos la capacidad termal del muro, el estado estacionario tarda más en llegar para ambos fluidos. Lo cual cumple el balance de energía ya que gran parte de la energía del fluido caliente se ha ido en calentar el muro y este cede menos energía al fluido frío durante el transitorio. Por lo que el calor que pierde el fluido caliente, se cede de manera más gradual que si el muro retiene menos energía.

Para simular el caso en que C^* es 10 hemos incrementado la capacidad térmica del muro o su grosor, pero hay otro caso en que sucede esto, cuando los fluidos son gases. Entonces la capacidad térmica del muro es mucho mayor y el tiempo para llegar al estacionario aumenta.

Una vez hemos alcanzado el estado estacionario, y como los fluidos tienen la misma velocidad y las mismas propiedades, la distribución de temperaturas a lo largo del intercambiador tendrían que ser iguales, y en este caso lo son como podemos apreciar en la figura 4.2:

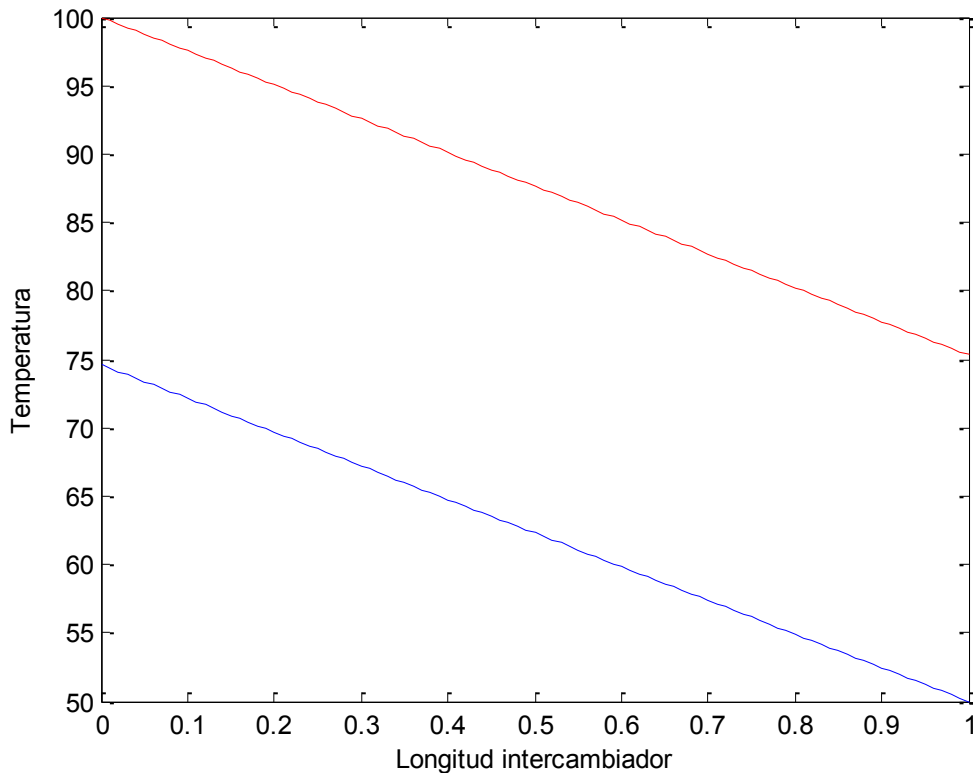


Fig 4.2. *Distribución de las temperaturas a lo largo del intercambiador para los dos fluidos*

La temperatura cae en el fluido caliente y sube en el fluido frío, a lo largo del intercambiador, al mismo ritmo. Como los parámetros L y D son iguales, las pendientes son lineales. El fluido caliente entra por la izquierda y sale por 1, y el frío lo hace al revés, entra por el final (1) y sale por el principio al ser un intercambiador contracorriente. Como ha dado tiempo a alcanzar el estado estacionario para ambos fluidos y el intercambiador es lo suficientemente largo, y como los fluidos tienen las mismas propiedades; la temperatura de salida de ambos fluidos es la misma, la media entre el fluido caliente a la entrada (100) y el frío a su entrada (50), en este caso los dos acaban en 75 grados.

4.1.2 Medición de la constante de tiempo

Si plotamos la evolución de las temperaturas para todos los puntos del intercambiador en todo el tiempo, observaremos lo siguiente:

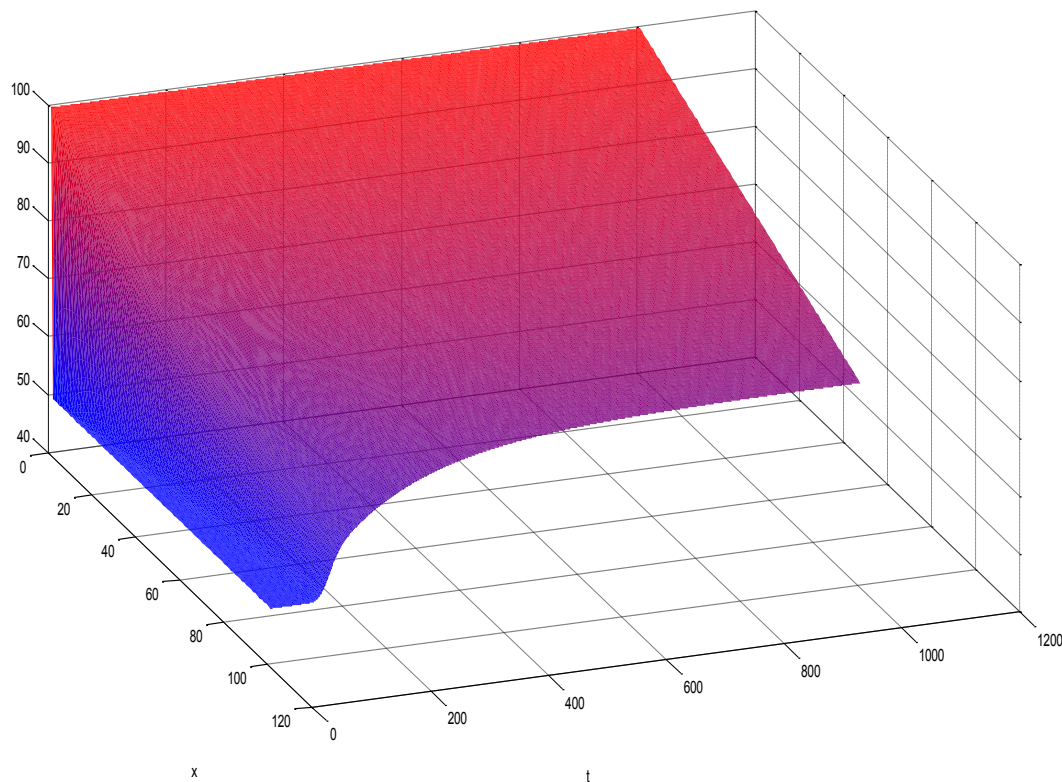


Fig 4.3 Gráfico en 3d de la evolución de las temperaturas del fluido caliente en toda la longitud del intercambiador en el tiempo.

Vemos que el comportamiento siempre sigue un patrón que puede ser aproximado como un sistema de primer orden tal y como vimos en la asignatura sobre “ingeniería de control”. Estos siguen un comportamiento que sigue el siguiente esquema extraído de [12].

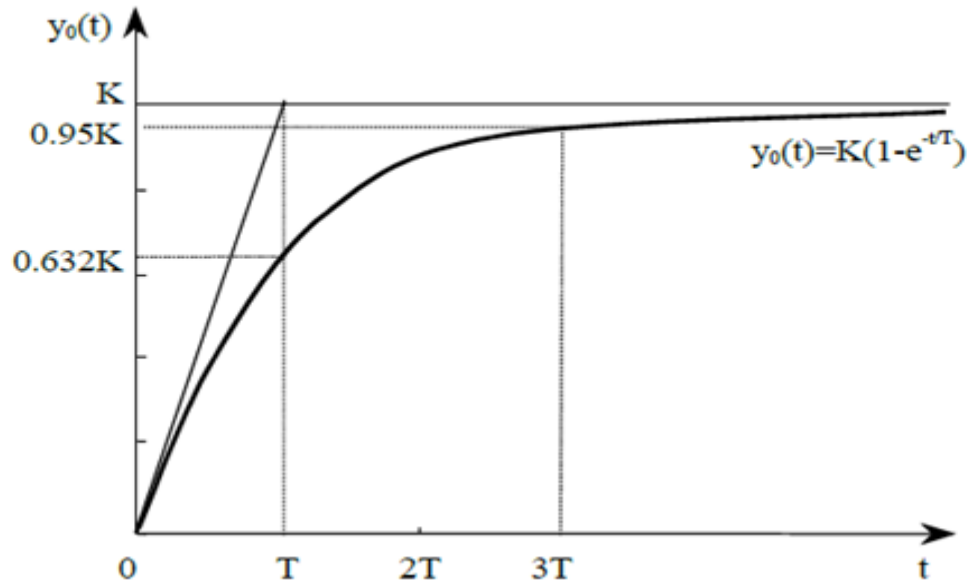


Fig 4.4, Esquema de comportamiento de un sistema de primer orden

Tiene sentido que así sea, puesto que las derivadas que aparecen en el sistema de ecuaciones son derivadas primeras cuyas soluciones suelen ir asociadas a exponenciales. Así pues, la manera en que podemos aproximar la evolución de la temperatura en el tiempo es:

$$T(x, t) = T^0(x) + (T^\infty(x) - T^0(x)) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau(x)}} \right)$$

La manera en como determinamos la variable de tiempo adimensional en cada elemento del intercambiador y para cada fluido (o para el muro), es siguiendo el esquema de la figura 4.5. Esperamos que el sistema llegue al estacionario. Multiplicamos el incremento de temperatura por $0.632 \cdot 0.95$ y vemos en que tiempo se ha dado esa temperatura. Ese será el valor de la constante temporal que utilizaremos para determinar el tiempo que tarda el sistema en llegar al estacionario.

4.1.3 Respuesta al cambio de caudal

De manera similar a como hicimos para aplicar el incremento en la temperatura, en este caso nos basaremos en el artículo [2] para comparar nuestros resultados. En el apartado anterior solamente pudimos comprobar que se cumplía el balance de energía y que las hipótesis eran correctas. Ahora gracias a [2] contamos con resultados experimentales con lo que la validación del modelo es completa.

La principal variación con la que trabajamos en este caso es con la diferente modelización de los parámetros, que en [2] es diferente a [1]. Debido al carácter experimental del artículo han sido definidas no sólo las propiedades de los fluidos enfocándose en el balance de energía, sino también las características geométricas del intercambiador y los coeficientes convectivos de transferencia de calor. El experimento se ha diseñado de la siguiente manera:

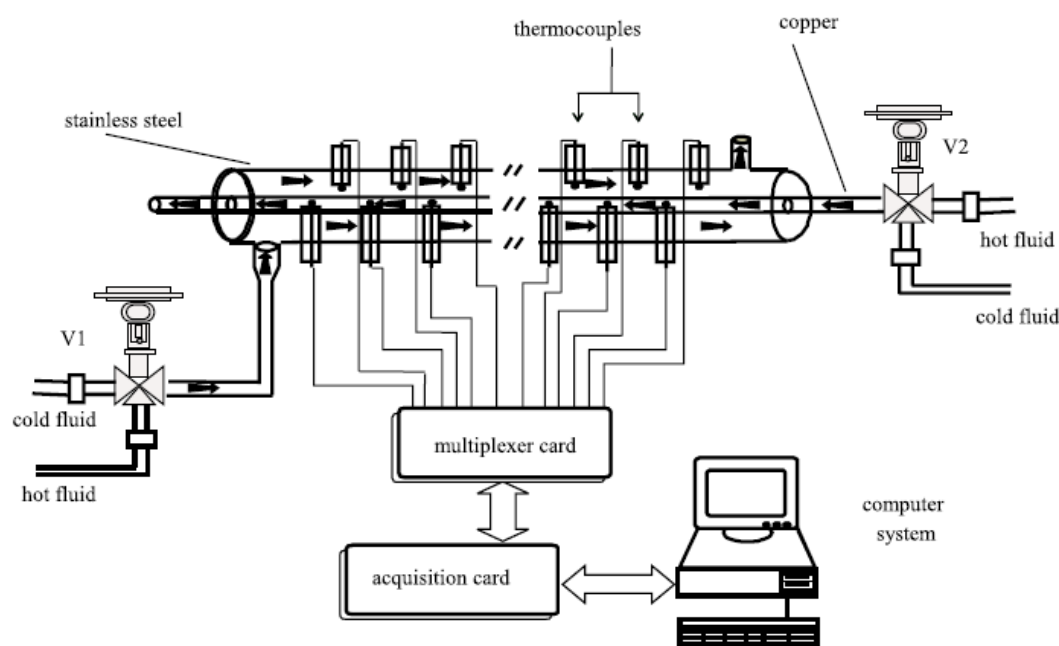


Fig 4.5 Diseño de toma de datos del experimento

Se ha utilizado agua con lo que las propiedades del fluido son las típicas que manejamos para el agua. Los datos geométricos son los siguientes:

| | k ($\text{W K}^{-1} \text{m}^{-1}$) | C_p ($\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$) | ρ (kg m^{-3}) | D (m) | a (m) | L (m) |
|------------|---|--|-------------------------------|---------|---------|---------|
| Inner tube | 384 | 394 | 8900 | 0.02 | 0.001 | 4.5 |
| Outer tube | 45 | 490 | 7850 | 0.04 | 0.003 | 4.5 |

Para determinar los coeficientes externo e interno se han utilizado las siguientes correlaciones:

$$h_e = \frac{k}{D} Nu = \frac{k}{D} 0.022 Re^{4/5} Pr^{1/2}$$

$$h_i = \frac{k}{D_i} Nu = \frac{k}{D_i} 0.027 Re^{4/5} Pr^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_w} \right)^{.14}$$

La parametrización propuesta se ha hecho en base a las siguientes variables adimensionales:

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad t^* = t \frac{V_c}{L}, \quad V^* = \frac{V_h}{V_c}, \quad C_h^* = \frac{C_h}{C_w}, \quad C_c^* = \frac{C_c}{C_w},$$

$$N_h = \frac{h_h A_h}{\dot{m}_h C_{ph}} \quad \text{and} \quad N_c = \frac{h_c A_c}{\dot{m}_c C_{pc}}.$$

Así, definimos los casos que se proponen en el artículo y los simulamos con nuestro algoritmo de diferencias finitas implícitas. Para presentar los resultados usaremos las siguientes adimensionalizaciones propuestas por [2].

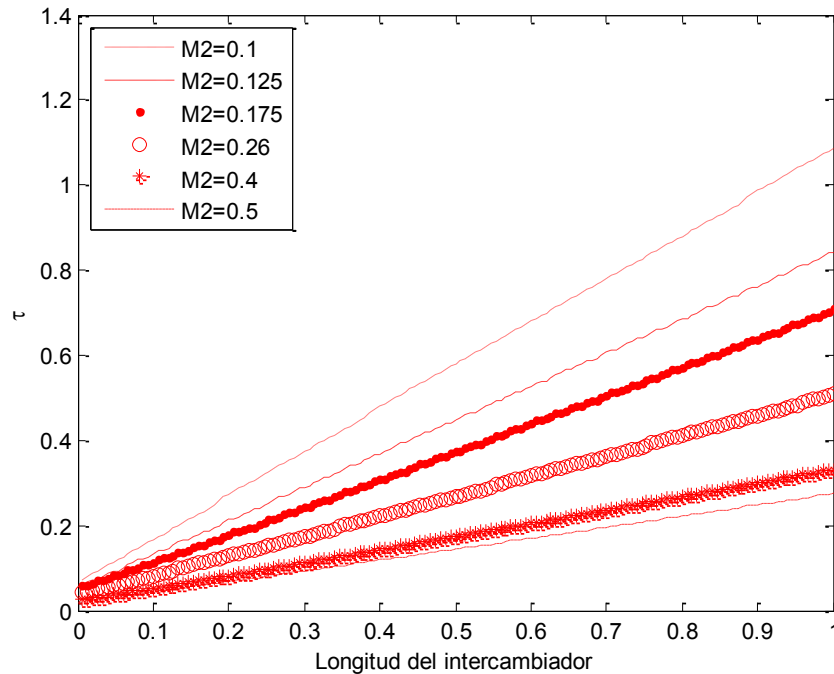
$$V^{*0} = 0.45$$

$$N_h^0 = 1.52$$

$$N_c = 0.36$$

Con un M2 inicial de 0.08.

A partir de ahí, se escogen los siguientes caudales máscicos de *step*, para llegar a los siguientes resultados:



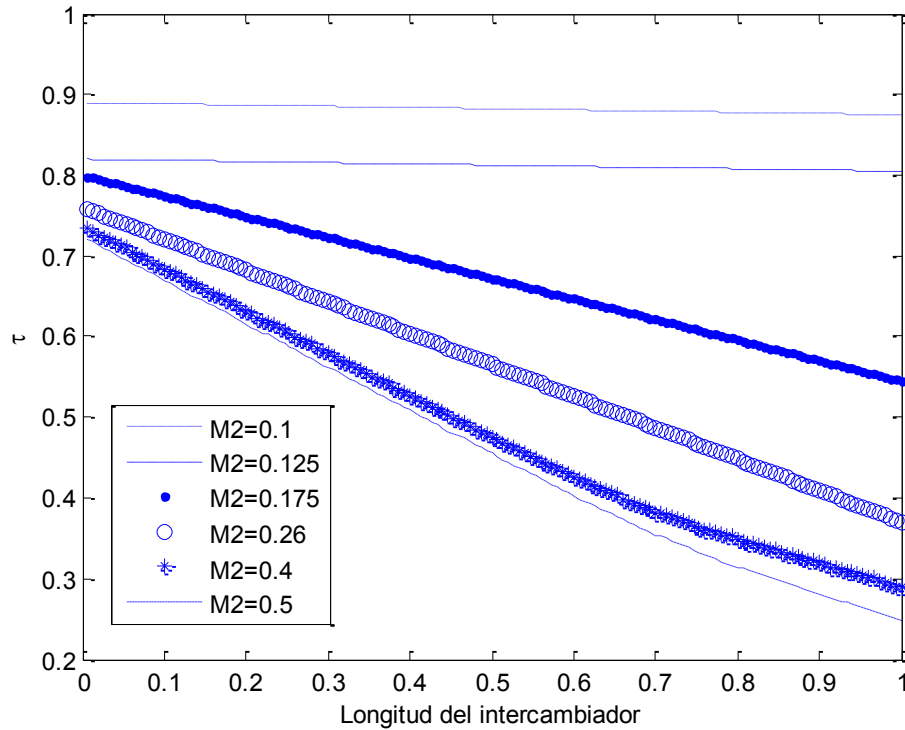


Fig 4.6 Constante de tiempo para los dos fluidos, para diferentes cambios de caudal

Analizando las gráficas observamos lo siguiente:

1. La constante de tiempo evoluciona de manera lineal a lo largo de la longitud del intercambiador.
2. Para el fluido caliente, la constante se incrementa en la dirección del flujo de manera que cuanto más se aleja de la entrada al intercambiador del fluido, mayor es. La pendiente que apreciamos en la evolución de la constante de tiempo se hace más pequeña según el valor del *step* aplicado, el incremento del caudal, se incrementa.
3. Para el fluido frío, cuando el incremento de flujo másico es pequeño, la constante de tiempo prácticamente no cambia prácticamente en la longitud del intercambiador. Para valores del *step* más grandes, el valor de la constante incrementa la pendiente en la dirección del flujo de manera similar a como sucedía para el flujo caliente, aunque en valores por debajo a los que aparecían para los *steps* pequeños.

Estos resultados son muy similares a los que presenta [2] de manera experimental. A continuación compararemos los algoritmos y los resultados.

4.1.4 Comparación de los resultados de los códigos y resultados experimentales

Cuando comparamos los algoritmos de los métodos numéricos observamos que los resultados para el fluido 1, el fluido caliente, son muy parecidos. La figura 4.7 es un ejemplo de ello:

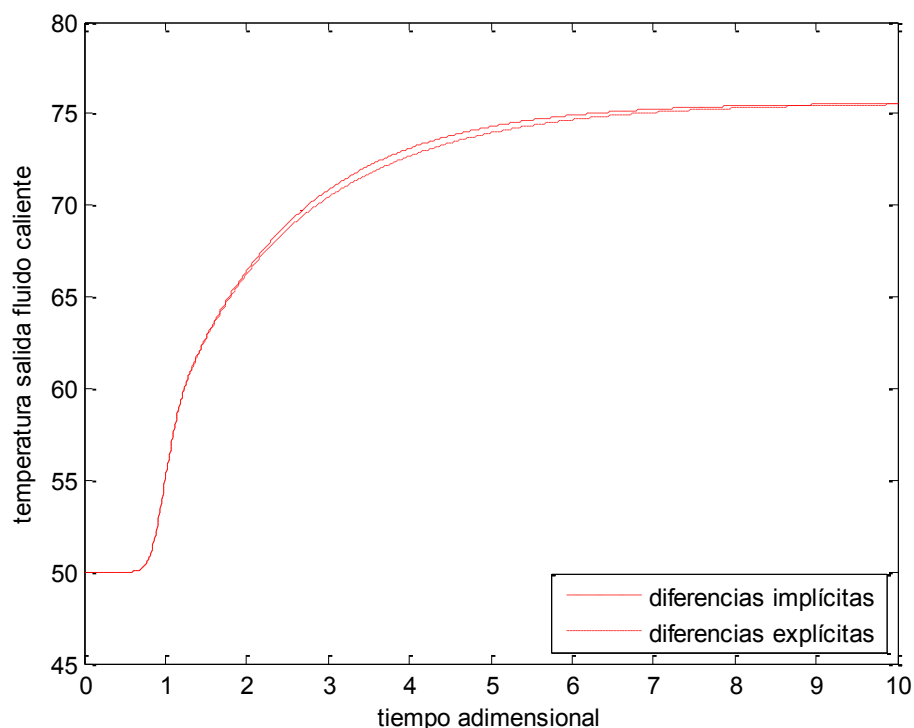


Fig 4.7 Comparación de la evolución en el tiempo de la temperatura a la salida del intercambiador para el fluido caliente de los dos algoritmos numéricos

Tiene sentido si tenemos en cuenta que la simplificación con que conseguíamos una diferencias finitas explícitas se hacían sobre el fluido 2, como ya se explicó en el apartado 3.2.5. Si planteamos lo mismo respecto del fluido 2, el fluido frío, observamos que la solución no varía en el estacionario, pero el comportamiento hasta alcanzar el estacionario sí varía. En concreto aparece un pequeño retraso en la evolución de las temperaturas. Y ello es debido a la hipótesis que aplicábamos de retrasar un nodo la temperatura de entrada al elemento para ese fluido. No obstante si vemos la figura 4.8 nos daremos cuenta de que el error es muy pequeño.

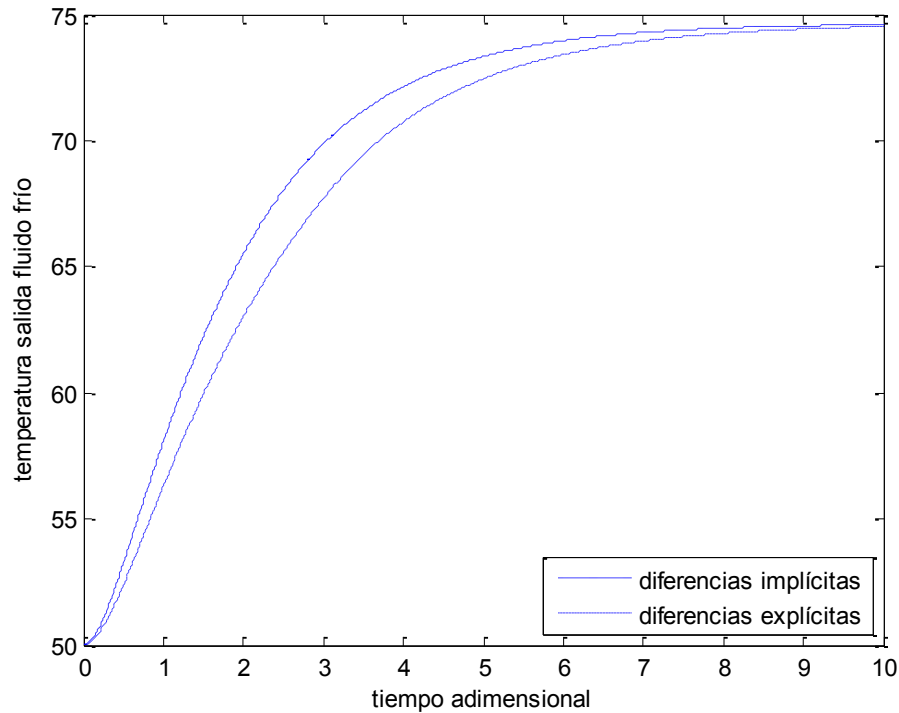


Fig 4.8 Comparación de la evolución en el tiempo de la temperatura a la salida del intercambiador para el fluido frío de los dos algoritmos numéricos

Respecto de la validez de los algoritmos. Vamos a comparar con los resultados experimentales de [2]. En las siguientes gráficas compararemos el algoritmo analítico de [1] con nuestros resultados por diferencias finitas implícitas y los datos recogidos por el laboratorio de Rouen de manera experimental.

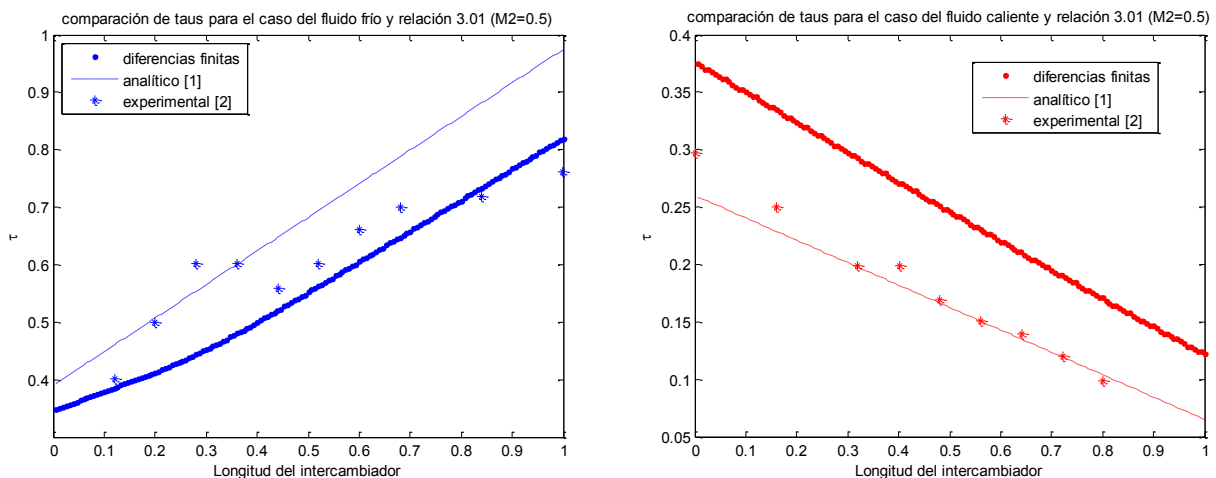


Fig 4.9 comparación de la constante de tiempo para los dos fluidos en el caso donde la relación es 3.01 ($M_2=0.5$)

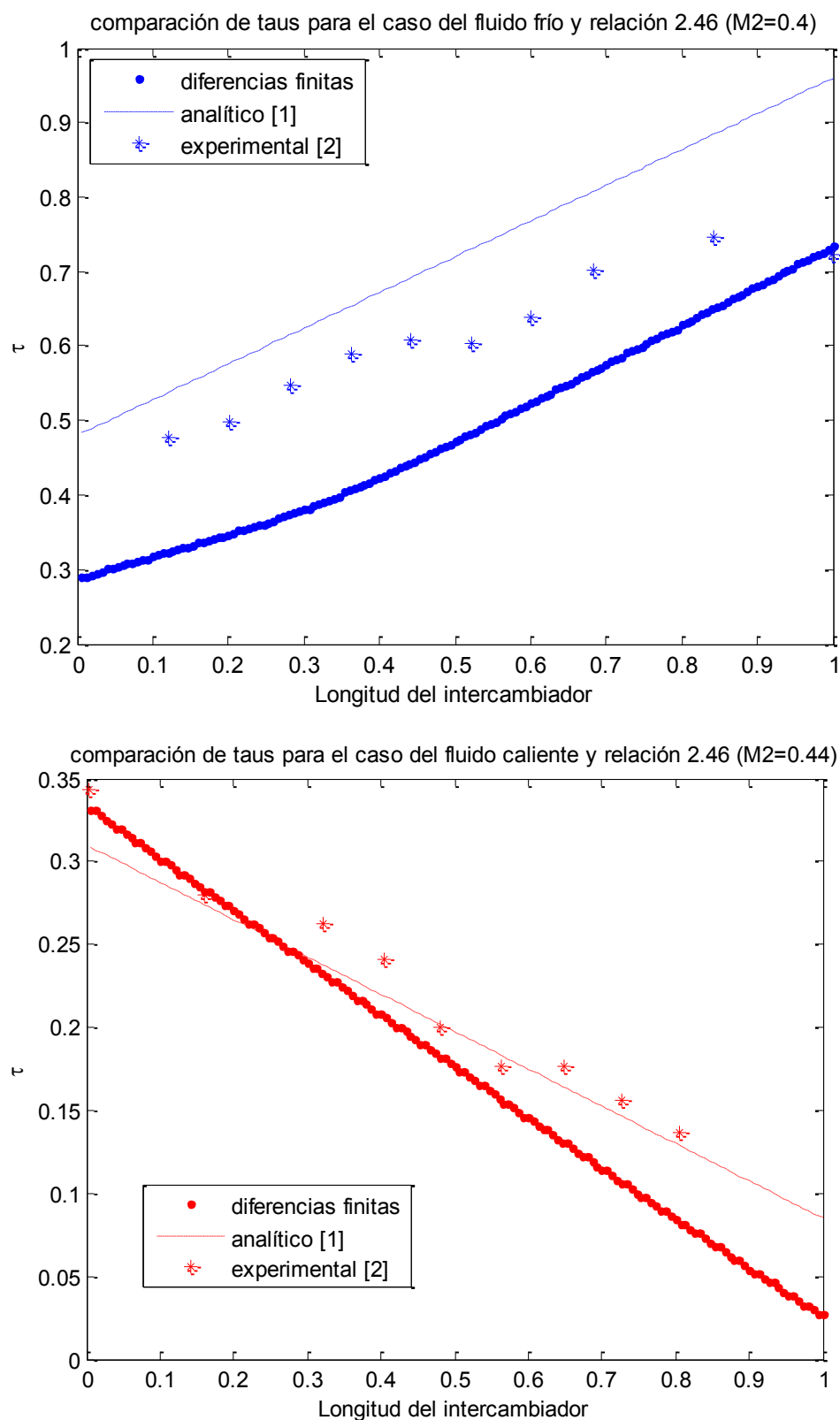


Fig 4.10 comparación de la constante de tiempo para los dos fluidos en el caso donde la relación es 2.46 ($M2=0.4$)

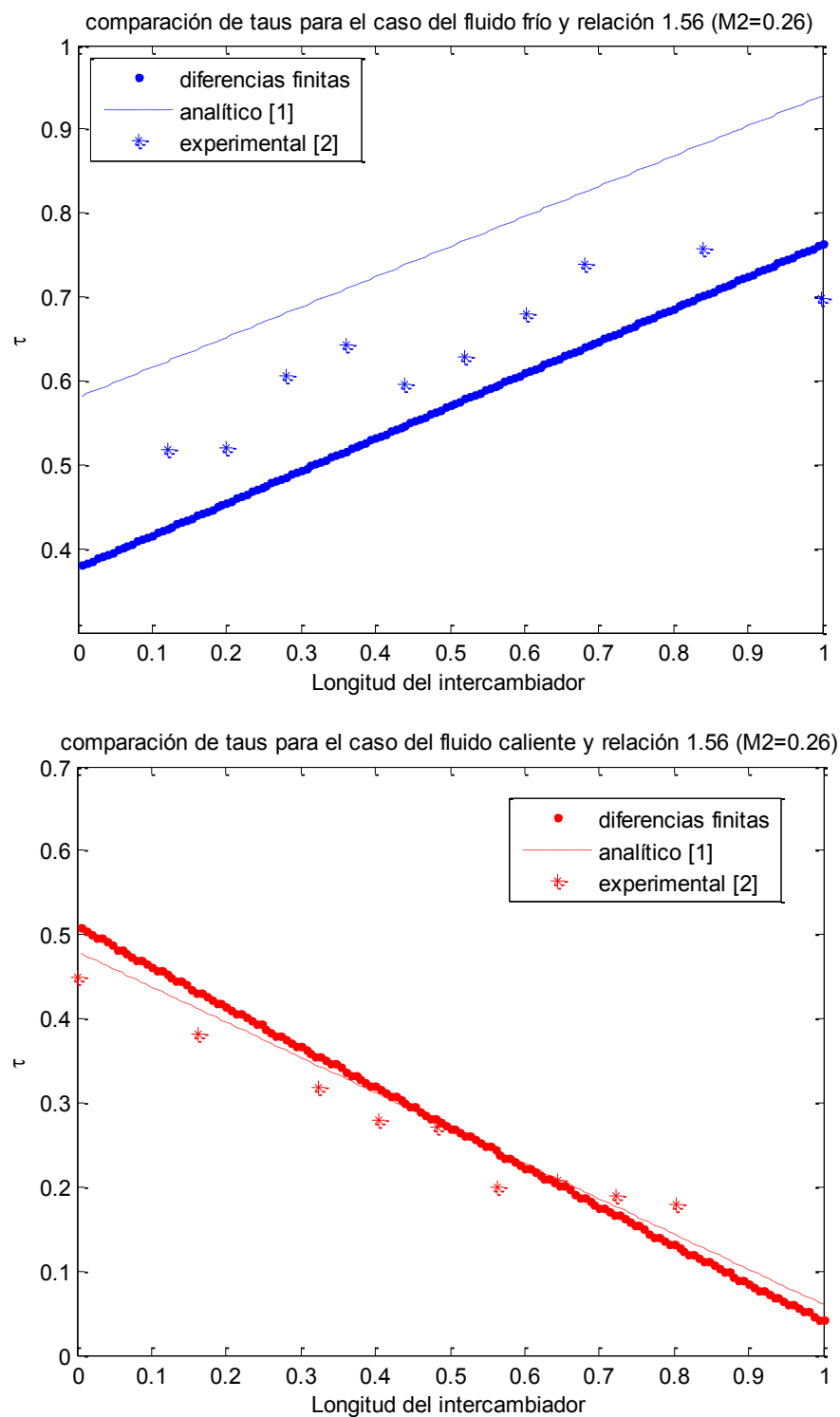


Fig 4.11 comparación de la constante de tiempo para los dos fluidos en el caso donde la relación es 1.56 ($M2=0.26$)

Como podemos ver los resultados son muy ajustados y demuestran que los resultados arrojados por los diferentes algoritmos son fiables. A continuación los usaremos para simular el intercambiador de una central termosolar como la descrita en el capítulo 2.

4.2 Intercambiador Aceite-Sales de la central termosolar

El intercambiador donde vamos a aplicar nuestro algoritmo es en el de aceite-sales. Desde un punto de vista computacional es el más sencillo ya que las condiciones de trabajo están muy restringidas y no está acoplado a otros intercambiadores que dependan directamente de él como pasa en el caso del agua donde tenemos un circuito de aceite que pasa por un sobrecalentador primero, después un evaporizador y por último un precalentador. Cuando hagamos estos intercambiadores deberemos acoplar las condiciones de trabajo de los intercambiadores en función de la presión del agua y del calderín y ello incrementa la complejidad. Por ello primero trataremos este intercambiador analizado en condiciones nominales. Posteriormente ampliaremos el espectro a diferentes situaciones en los cambios de demanda.

Las condiciones en que trabaja el intercambiador están fijadas por las temperaturas que requiere el ciclo de potencia y por los límites que establecen los fluidos con los que trabajamos. Debemos prestar especial atención a estos últimos ya que al ser fluidos térmicos especiales, tienen peculiaridades que deben ser estudiadas.

En el caso del fluido térmico caloportador tenemos diferentes opciones, pero casi siempre se suelen usar aceites sintéticos ya que estos tienen altas capacidades térmicas, el punto de congelación no es muy bajo y permiten altas temperaturas al tener una buena estabilidad térmica. Otra alternativa son las sales fundidas, un producto más barato, que prácticamente no necesita presurización extra en las tuberías y con mayor estabilidad térmica (que permite trabajar a mayores temperaturas) pero que tiene el problema de tener un punto de solidificación de más de 200 grados y la instalación resulta dañada cuando se llega a este punto; por lo que aunque se está investigando esta vía, de momento no es la mejor elección. La otra es evaporar directamente el agua en los tubos, pero ello sólo es posible cuando se trabaja con un ciclo a temperaturas por debajo de 200 grados centígrados, ya que por encima la presión es excesiva y daña a los tubos.

El fluido que se usa en este caso es el Therminol VP-1 cuyas propiedades vienen dadas por el fabricante y se recogen en [6]. Se trata de un aceite sintético que trabaja bien desde los 12 grados, temperatura a la que cristaliza, y los 400 grados, cuando se evapora y desnaturaliza. En el ciclo de potencia nos interesa una temperatura lo más alta posible por lo que, sin irnos al límite, cogeremos la máxima temperatura admisible que en este caso será de unos 392 grados centígrados para tener un cierto margen. La mínima temperatura que podríamos usar es de 12 grados, ya que al solidificar dañamos la instalación. Esta temperatura no requiere de un cuidado meticuloso ya que la central está pensada para ser situada en entornos cálidos donde rara vez se dan temperaturas tan bajas y nunca si está en funcionamiento. La temperatura límite inferior

viene dada en realidad por la viscosidad ya que esta aumenta cuanto menor es la temperatura y, debido a ello, las bombas presentan problemas para poder mover el fluido dentro de los requerimientos de caudal necesarios. Viendo la evolución de la viscosidad con la temperatura apreciamos que por debajo de 300 grados esta aumenta mucho más rápido por lo que intentaremos funcionar por encima de unos 280 grados centígrados.

Hay que señalar que, observando [6] nos damos cuenta que la presión de vapor del aceite a unos 400 grados centígrados es de unos 10 bares. Por ello, para evitar fenómenos de cavitación debemos presurizar las tuberías a al menos 13 bares. Ello no supone un gran inconveniente, los tubos que suelen usarse aguantan presiones más de 4 veces superiores sin problemas, pero debe tenerse en cuenta a la hora de diseñar la instalación.

Respecto de las sales, el límite más reseñable es el inferior, ya que por debajo de unos 150-200 grados las sales solidifican causando daños difíciles de reparar. Por ello tendremos que aislar los tanques muy bien y añadir sistemas auxiliares que garanticen que nunca bajemos de una temperatura inferior a 200 grados centígrados. La tecnología de las sales fundidas es relativamente reciente y aún está en plena investigación y crecimiento. Las ventajas son varias: por un lado no necesitan un tratamiento de purificación tan alto como los aceites y por ello su coste es bastante más bajo, además permiten unas temperaturas más altas que proporcionan más potencia en ciclos Rankine, su alta densidad y calor específico les permite acumular gran cantidad de energía y, por último, presentan una muy baja presión de vapor con lo que no hay que prestar una gran atención a la presurización del circuito. En este caso, se puede usar la sal de nitratos fundida Hitec-XL. Su coste es menos de la tercera parte el del aceite Terminol VP-1 según [7]. Su temperatura mínima son 120 grados, algo realmente bajo para tratarse de sales fundidas. Y su máxima está en torno a los 500 grados, una temperatura baja para tratarse de sales basadas en nitratos donde se alcanzan temperaturas máximas de más del doble de este valor, pero que al ser mayor en este caso que la del aceite caloportador será suficiente para nosotros.

El motivo por el que no se usan las sales directamente como fluido caloportador es principalmente porque su temperatura de solidificación de 120 grados es incompatible con un tubo de absorción largo que no puede estar aislado en la zona de captación y, en caso de parada de la central, se haría costoso el garantizar dicha temperatura.

Para el almacenamiento de la energía necesitamos dos tanques, uno donde hemos calentado las sales y que se encuentra a una temperatura muy alta y que es donde guardamos la energía para producir potencia cuando el sol no calienta, y otro donde llevamos la sal una vez que esta ha entregado la potencia al intercambiador y ha bajado su temperatura hasta el punto en que ya no nos produce energía en la central. A estos dos depósitos se les suele denominar respectivamente depósito caliente y depósito frío. Por simplicidad supondremos que las temperaturas a las que entran y salen las sales fundidas al intercambiador, son las temperaturas que hay en estos tanques. Aunque sabemos que hay ciertas pérdidas debidas al transporte hasta el intercambiador, estas no deberían suponer un salto superior a 2 grados si la central está bien diseñada con lo que en una primera aproximación nos vale como hipótesis de partida.

El depósito caliente estará a la máxima temperatura que el fluido caloportador (aceite) es capaz de calentar las sales pasado un cierto tiempo. Siendo la máxima temperatura del aceite unos 392 grados, supondremos que la transferencia es eficiente y que es capaz de elevar la temperatura de las sales hasta casi su temperatura, con lo que la temperatura de las sales será de aproximadamente 390 grados centígrados.

El depósito frío interesa que esté lo más frío posible para que el salto térmico sea mayor y, por lo tanto, la energía guardada también. Las sales elegidas tienen la ventaja de tener un punto de solidificación muy bajo de unos 120 grados centígrados pero en este caso nuestra limitación vendrá dada por el aceite ya que, si bien este es capaz de bajar hasta los 12 grados antes de cristalizar, cuando baja de unos 280 grados la viscosidad aumenta enormemente con lo que en la central éste se mantiene en valores superiores a esta temperatura. Actualmente este es uno de los puntos que se está investigando para poder mejorar la eficiencia del proceso. Para el tanque frío supondremos una temperatura de unos 292 grados centígrados ya que no es posible que cuando enfriamos las sales para entregar la energía al ciclo de potencia, consigamos una temperatura menor a la del fluido frío que estamos calentando, es decir, al aceite. Con estos valores apreciamos un salto de temperaturas similar en ambos fluidos, entre unos 95 o 100 grados centígrados.

Las propiedades medias de estos dos fluidos, entre las temperaturas elegidas, son las siguientes según [6] y [7]:

| | T frío | T caliente | ρ Kg/m ³ | μ cp | K W/m K | C J/Kg K |
|--------|-----------|---------------|-----------------------------|-------------|------------|-------------|
| Aceite | 286 | 382 | 815 | 0.2 | 0.1 | 2319 |
| sales | 296 | 392 | 1992 | 6.27 | 0.519 | 1447 |

A partir de estos datos y como conocemos los requerimientos de la central que han sido explicados en el punto 3, podemos calcular los caudales máxicos con algo de termodinámica básica. Sabemos que la central debe ser de 50 MW eléctricos funcionando a plena carga, cuyo ciclo de potencia tiene un rendimiento de en torno a un 40% (supondremos un 35% para ser conservadores ya que el caudal ha de ser suficiente como para llegar a la potencia requerida), con un almacenamiento de energía que sea capaz de proveer hasta 7 horas y media. Así pues, sabiendo que la capacidad calorífica de las sales es de unos 1450 J/KgK y que el salto térmico de las sales será de unos 92 grados centígrados, sabemos que el caudal debe ser:

$$\dot{M}_{sales} = \frac{P}{C * \Delta T * \varepsilon}$$

$$\dot{M}_{sales} = \frac{50MW}{1450 \frac{J}{kg \text{ } ^\circ K} * 92^\circ K * 0.35} = 1070 \approx 1000 \frac{kg}{s}$$

Sabiendo que debemos mantener un flujo de unos 1000kg/s durante 7.5 horas (27000 segundos), estimamos que la capacidad de los tanques de almacenamiento será de algo más de 27000 toneladas. Lo que cuadra con la realidad ya que los tanques que se usan son de 28000 toneladas.

Respecto del caudal de agua, procedemos de la misma manera. El calor que es transferido por las sales es el mismo que recibe el aceite suponiendo que no hay pérdidas cuando estamos trabajando en condiciones nominales (al arrancar una parte del calor se va en calentar los componentes). Este calor será:

$$\dot{Q} = \dot{M} * C * \Delta T$$

Como sabemos que el salto de temperaturas de cada fluido es aproximadamente en mismo, el caudal será:

$$\dot{M}_{aceite} = \frac{\dot{M}_{sales} C_{sales}}{C_{aceite}} = 1000 * \frac{1450}{2320} = 625 \frac{kg}{s}$$

Lo siguiente será determinar el número de tubos del fluido que va por dentro, para poder dimensionar el intercambiador. Desafortunadamente, esto es un tema que no está claro. Las centrales construidas hasta la fecha han optado por conducir la sal por la carcasa debido a la necesidad de mantener a las mismas por encima de 200 grados. En caso de parada de la central, debemos aplicar calor por medio de resistencias eléctricas para mantener al fluido por encima de esta temperatura. Y es más fácil enrollar resistencias eléctricas a una carcasa que a más de mil tubos pequeños.

Sin embargo que la sal vaya por dentro presenta numerosas ventajas a la hora de poder vaciar el intercambiador para su limpieza y mantenimiento. Además el choque térmico cuando la sal actúa como fluido caliente se absorbe mejor por tubos de pequeño diámetro que cuando tenemos una carcasa grande. Por lo que parece más lógico utilizar las sales por dentro de los tubos que por fuera y, en caso de parada de la central, asegurarnos de vaciar el intercambiador para que no solidifiquen las sales.

No obstante simularemos ambas propuestas para determinar cuál se comporta mejor en los transitorios de cara a una mejor transferencia de calor.

4.2.1 Sal como fluido caliente yendo por dentro de los tubos

El objetivo, una vez que tenemos las características de los fluidos que pasan por el intercambiador, será modelizar geométricamente el intercambiador para saber la longitud del mismo y conseguir los coeficientes convectivos de los fluidos. Para ello, primero usaremos las correlaciones que nos llevan a determinar los coeficientes y con ellos el coeficiente global de transferencia de calor. Con dicho parámetro y la siguiente fórmula, podemos conseguir la longitud del intercambiador:

$$Q = U * A * \Delta T_{LM}$$

Lo primero que necesitamos para abordar las correlaciones, es determinar los aspectos básicos que corresponden a la geometría del intercambiador. Para ello decidimos que tipo de intercambiador necesitamos. Aquí usaremos el intercambiador tubo carcasa de un solo paso en configuración de U de tipo Hairpin de tres cuartos de pulgada de diámetro de tubo (3/4"). Estos intercambiadores son los que mejor se ajustan a un intercambiador de doble tubo en contracorriente como simulamos con nuestros algoritmos y además son los más indicados cuando el choque térmico es muy grande, como en este caso, ya que permiten una cierta dilatación de los materiales. Respecto de los tubos, utilizamos 3/4" por ser un estándar muy extendido en la industria. Si escogemos [8] como fabricante, y el mínimo espesor, vemos que son capaces de soportar la presión exigida más que de sobra y, al ser de pared delgada, acortamos los procesos transitorios que es lo que nos interesa.

Para calcular los parámetros lo primero que hemos de fijar es la velocidad de diseño que tendremos por dentro de los tubos. Esta viene dada por el material empleado en su fabricación. Buscamos que no sea tan rápida como para erosionar demasiado pronto los tubos, ni demasiado lenta como para permitir el depósito de las partículas en suspensión. Típicamente esta velocidad mínima está en torno a 1 m/s y para la máxima, si el tubo está fabricado en acero, se da en torno a 3 m/s para el agua. En este caso cogeremos una velocidad intermedia, 2 m/s para no desgastar los tubos en exceso. Para otros fluidos usamos la siguiente fórmula basándonos en la teoría impartida en la asignatura "sistemas térmicos" durante la carrera:

$$V = V_w * \sqrt{\frac{\rho_w}{\rho}}$$

En este caso, si por dentro tenemos el aceite, su densidad sería aproximadamente de 750 kg/m³, mientras que las sales estarían en torno a unos 2000 kg/m³. Escogiendo el caso más desfavorable vemos que deberíamos usar una velocidad máxima más baja que en el caso del agua, por lo que escogeremos 0.7 m/s al ser una velocidad de diseño bastante típica en este tipo de intercambiadores.

A continuación establecemos el número de tubos a partir del caudal de las sales, gracias a la siguiente ecuación:

$$\dot{M} = V \frac{\pi}{4} d^2 \rho N_{tubos}$$

Donde la velocidad será 1 m/s como se definió anteriormente; el diámetro es de tres cuartos de pulgada, $\frac{3}{4}$ " son 19.05mm, menos dos veces el espesor. Para determinar el espesor buscamos la hoja de características de un fabricante [8] y vemos que para un espesor típico de unos 1,65 mm, la presión admisible en temperaturas que pueden llegar a los 400 grados centígrados ronda los 60 bares, lo que es bastante mayor que los 12 o 13 bares que necesitaríamos en el caso de que el aceite fuera por los tubos. Por lo tanto asumiremos ese valor como espesor para los tubos en cualquiera de los casos. Por último la densidad será la de las sales, unos 1992 kg/m³. Con estos valores nos salen:

$$N_{tubos} = \frac{1000 * 4}{0.7 * \pi * ((19.05 - 2 * 1.65) * 10^{-3})^2 * 1992} = 3681 \approx 3700 \text{ tubos}$$

En este caso, al ser bastante potencia intercambiada en un solo paso, sale un número de tubos elevado.

Para los cálculos de la carcasa, tanto para sus dimensiones como sobre todo para su coeficiente de transferencia de calor, utilizaremos el método Kern que es el que utilizamos en la asignatura de "sistemas térmicos". Es un método aproximado bastante tosco ya que no tiene en cuenta por ejemplo la geometría de la carcasa y sólo es válido en una primera aproximación, pero será suficiente para el alcance de esta tesis.

Lo primero que hemos de hacer es dimensionar los elementos del intercambiador. Los tubos ya han quedado definidos anteriormente. Utilizando un pitch de 1.5 veces el diámetro, tenemos que la distancia horizontal entre centros de los tubos, P_t , es de 28.6 mm. Si elegimos una configuración según una matriz triangular entre tubos con ángulo de 30 grados, que es como se suele configurar la distribución de los tubos en estos intercambiadores, sabemos por simple geometría que la distancia vertical entre tubos, P_x , es igual a raíz de tres veces el pitch, luego 49,5 mm. Para saber el diámetro de la carcasa usamos la siguiente relación donde utilizamos un factor corrector 0.93 debido a la configuración en 30 grados:

$$D_s = \sqrt{\frac{4\sqrt{3}P_t^2 N_{tubos}}{\pi 0.93}} = 2.67 \approx 2.7 \text{ metros}$$

En este caso sólo tenemos un paso por tubo ya que el elevado choque térmico hace inviable el uso de dos o más pasos por tubo. Los intercambiadores tipo Hairpin, los que usamos en estas centrales, son de un paso por tubo y son curvados para poder absorber las dilataciones y contracciones del material debido a los cambios bruscos de temperatura.

A continuación calculamos el diámetro equivalente, necesario para aplicar el método Kern y calcular el coeficiente conectivo que es nuestro objetivo final. Considerando la configuración en 30 grados como anteriormente hicimos:

$$D_e = \frac{4(\sqrt{3}/2Pt^2 - \pi D^2/4)}{\pi D} = 0.0282m$$

Este parámetro, junto con el resto de los parámetros geométricos calculados, se introduce en la siguiente fórmula para obtener el área de paso efectiva con la cual calcularemos el Reynolds equivalente. En este caso supondremos una longitud entre bafles de medio metro que es la típica para un diseño inicial en este tipo de intercambiadores.

$$S_s = \frac{D_s}{P_T} (P_T - D_o) L_b = 0.445m^2$$

Con ello el Reynolds equivalente será:

$$Re = \frac{\rho v D_e}{\mu} = \frac{\dot{m} D_e}{\mu S_s} = \frac{625 * 0.0283}{0.0002 * 0.25} = 213750$$

Un Reynolds muy superior a 5000 con lo que se asegura que el flujo sea turbulento, condición necesaria para nuestras hipótesis de transferencia de calor en la modelización del intercambiador. Con las propiedades del aceite dadas en la tabla conseguimos el número de Prandtl:

$$Pr = \frac{c_p \mu}{k} = \frac{2319 * 0.0002}{0.1} = 4.66$$

Tenemos todo para aplicar el método Kern con la siguiente fórmula:

$$h_e = \frac{k}{D} Nu = \frac{k}{D} 0.36 Re^{.55} Pr^{.33} \left(\frac{\mu}{\mu_w} \right)^{.14} = 2140 \frac{W}{m^2 \circ K}$$

El flujo externo quedaría resuelto pero aún necesitamos saber el coeficiente convectivo interno para determinar el coeficiente global de transferencia de calor.

Este coeficiente es más sencillo debido a que ya tenemos las características geométricas de los tubos. Por lo tanto aplicamos directamente la correlación. En este caso tenemos varias opciones, en [2] usan la correlación modificada de Colburn llamada de Sieder and Tate. Su forma es similar a una de las que usábamos en transferencia de calor para flujo interno en condiciones de turbulencia de Dittus Boelter. En este caso aplicaremos la misma que en el artículo por tener en cuenta el cambio de la viscosidad de las sales respecto del agua, ya que esta diferencia es bastante notable en el caso de las sales, aunque no tenga una gran influencia en el valor final.

$$h_i = \frac{k}{D_i} Nu = \frac{k}{D_i} 0.027 Re^{4/5} Pr^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_w} \right)^{.14}$$

En este caso, el Reynolds sale igual a $1992 * 2.4 * 0.01575 / 0.00627 = 3500$. Sale, al igual que para el aceite, mucho más alto que los valores mínimos de turbulencia (2300), lo que encaja en nuestro modelo y lo justifica. El Prandtl es a su vez $1447 * 0.00627 / 0.519 = 18.2$. La correlación da:

$$h_i = 2050 \frac{W}{m^2 \cdot K}$$

Ya estamos en disposición de calcular el coeficiente global de transferencia de calor mediante la siguiente fórmula:

$$U = \left(\frac{D_o}{D_i h_i} + \frac{1}{h_e} + \frac{\ln\left(\frac{D_o}{D_i}\right) D_o}{2 k_t} \right)^{-1}$$

Donde sólo nos queda saber cuál es la conductividad térmica del tubo. No es un parámetro decisivo pero sabemos que será de en torno a 80 W/mK. Con ello, sale un coeficiente global de transferencia de calor de 1000 W/m²K. La longitud del intercambiador la calculamos como sigue:

$$L = \frac{Q}{\Delta T_{LM} * U * N_t * \pi * D_o}$$

Donde el ΔT_{LM} es de aproximadamente 10 grados y da una longitud de:

$$L = 62 \text{ metros}$$

Donde este valor correspondería con la longitud de los tubos. Al tener forma de horquilla, la longitud del intercambiador serían unos 30 metros.

Si implementamos los mismos cálculos con la sal por fuera, y seguimos los mismos pasos, nos salen los siguientes parámetros:

| | |
|-------------------------|--------|
| Número de tubos | 2745 |
| Ds [m] | 2.3 |
| De [m] | 0.0282 |
| Ss [m ²] | 0.3841 |
| Ree | 11645 |
| Rei | 99445 |
| hi [W/m ² K] | 2264 |
| he [W/m ² K] | 5705 |
| U [W/m ² K] | 1366 |
| L [m] | 55 |

Por lo tanto, dado que parece que el problema del diseño es el tamaño del intercambiador, sería preferible elegir que el aceite vaya por dentro y de esta manera la longitud del intercambiador es la mitad y queda aproximadamente:

$$L_{\text{intercambiador}} = 27.5 \text{ metros}$$

Un número muy alto y donde tenemos que analizar las pérdidas. Para ello:

$$\Delta p = \frac{f_s D_s (\dot{m}/S_s)^2 (N_b + 1)}{2 \rho D_e}$$

$$f_s = \exp\{0.576 - 0.19 \ln Re\}; \quad (400 < Re < 10^6)$$

Con ello, y suponiendo que el aceite va por dentro, las pérdidas de la carcasa son del orden de varios bares, por lo que habría que tener en cuenta la pérdida de carga y buscar la manera de hacer el intercambiador más corto. Para el propósito de esta tesis, esta modelización se acerca lo suficiente a la realidad para modelarlo en matlab y usar nuestro algoritmo.

Para nuestras hipótesis de modelización, uno de los parámetros que necesitábamos era comprobar que el número de Biot salía no mayor que 0.05. En este caso no hay problema:

$$Bi = \frac{h * e}{k} = \begin{cases} \frac{2050 * 0.00165}{80} = 0.04 \\ \frac{2140 * 0.00165}{80} = 0.044 \end{cases}$$

Sin embargo salen valores muy cercanos. Se recomendaría usar aceros de alta conductividad para que el modelo funciones.

5. Conclusión

Para acabar este proyecto, haremos un repaso en el orden en que ha sido realizado

En primer lugar, establecimos el alcance, objetivos y motivación del proyecto. Se ha partido de varios artículos de reciente publicación para intentar resolver un problema que actualmente se presenta en las empresas de ingeniería y que no está del todo resuelto. También hemos propuesto un ejemplo de central donde implementar el modelo para ahondar en el enfoque práctico buscado.

Se ha estudiado el modelo teórico que resuelve la cuestión y se han elaborado varios algoritmos para resolver intercambiadores de calor de doble tubo coaxial en contracorriente bajo una serie de hipótesis dadas. Después se han comprobado que se cumplen una serie de requisitos relacionados con el balance de energía, y se ha visto que los resultados tienen sentido. Además, gracias a un artículo académico se han comparado los resultados con datos experimentales y se ha obtenido un gran ajuste que corrobora que el sistema está bien resuelto.

Los algoritmos que mejor han funcionado han sido las diferencias finitas, a pesar de tener un coste de computación mayor. El algoritmo analítico ha sido bastante complejo y no ha otorgado resultados buenos para muchos de los casos, en especial para sistemas de rápida estabilización, por lo que parece más útil utilizar los primeros, o contrastar y chequear cada caso antes de implementar un modelo final.

El modelo de la central no ha quedado cerrado del todo puesto que la pérdida de carga ha salido alta en exceso, pero eso es tema para otra tesis y no se ha profundizado en el diseño por desgracia. Ese punto puede ser mejorable, y también se pueden implementar estos algoritmos en una simulación completa de la central con los sistemas de control asociados, que nos otorguen un conocimiento más profundo de los estreses térmicos que sufren los tubos a lo largo de su vida útil.

Desde el punto de vista del alumno, ha sido un proyecto muy completo donde he podido poner en práctica muchas asignaturas vistas durante la carrera, lo que es gratificante para ver que lo que se ha estudiado sirve para algo más que superar unos créditos. Además he podido avanzar en mis conocimientos aprendiendo métodos numéricos de resolución de ecuaciones en derivadas parciales que durante la carrera no han sido suficientemente tratados. Por último, he tenido la oportunidad de realizar un proyecto relacionado con mi especialidad en energías, lo que ha sido motivante y completa muy bien la formación recibida.

Referencias

- [1] M. R. Ansari, V. Mortazavi, *Simulation of dynamical response of a countercurrent heat exchanger to inlet temperature or mass flow rate change*. Applied Thermal Engineering, vol. 26, 2006, p. 2401-2408.
- [2] M. A. Abdelghani-Idrissi, F. Bagui, L. Estel, *Analytical and experimental response time to flow rate step along a counter flow double pipe heat exchanger*. International journal of heat and mass transfer, vol. 44, 2001, p. 3721-3730.
- [3] F. P. Incropera, D. P. DeWitt, T. L. Bergman, A. S. Lavine, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, John Wiley & Sons, 2007.
- [4] R. Dolezal, A. Rolf, M. Klug, G. Riemenschneider, *solution of the heat-exchanger equation system*. Workshop modeling and control of Electric Power Plants, 1983, pp 69-75.
- [5] S. C. Chapra, R. P. Canale, *Numerical methods for engineers*. Mc Graw Hill, 2010.
- [6] Heat transfer fluids by Solutia. *Therminol VP-1*.
- [7] D. M. Blake, L. Moensa, M. J. Halea, H. Pricea, D. Kearneyb, U. Herrmannnc, *New Heat Transfer and Storage Fluids for Parabolic Trough Solar Thermal Electric Plants*, Proceedings of the 11th Solarpaces International Symposium On concentrating Solar Power and Chemical Energy Technologies, 2002.
- [8] ThyssenKrupp Fortinox SA. *Aceros Inoxidables, guía de productos*. 2009
- [9] Santiago García Garrido. *Centrales termosolares CCP: principales equipos y sistemas*. Renovetec. 2013.
- [10] J. Usaola. *Participation of CSP plants in the reserve markets: A new challenge for regulators*. Energy Policy 49, 2012, 562-571
- [11] R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy, *On the partial difference equations of mathematical physics*, IBM Journal of Research and Development 11 (2): 215–234, (March 1967)
- [12] Ogata, K., "Ingeniería de control moderna", Ed. Prentice-Hall
- [13] G. F. Simmons, S. G. Krantz, *Ecuaciones diferenciales*. Mc Graw Hill.